Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 15 No. 1, Feb. 1999

集值马尔可夫过程的定义及其相关问题

郑　静　　　　朱作宾
(安徽师范大学, 芜湖, 241000)　(宁波大学, 宁波, 315211)

摘　要

本文从集值马尔可夫过程的最简单定义出发, 讨论了它的一系列等价命题, 证明了它与已有的两种定义的等价性, 并就集值随机过程与其数值特征过程的马尔可夫性的关系进行了讨论, 完善了已有的结果.

关键词: 集值马尔可夫过程, 距离函数, 支撑函数.
学科分类号: 211. 6.

§1. 预备知识

本文恒设$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$为一完备的概率空间, X是可分的Banach空间. 范数为$\|\cdot\|$, X^*为其共轭空间. 记

$$\mathsf{P}_f(X)=\{A\subset X:\quad A\text{ 非空闭 }\};$$
$$\mathsf{P}_{fc}(X)=\{A\in\mathsf{P}_f(X):\quad A\text{ 凸 }\};$$
$$\mathsf{P}_{(w)kc}(X)=\{A\in\mathsf{P}_{fc}(X):\quad A\text{ (弱)紧 }\}.$$

对A、$B\in\mathsf{P}_f(X)$, $x\in X$, $d(x,B)=\inf\{\|x-y\|;\quad y\in B\}$, 称为$x$到$B$的距离, 称$d(\cdot,B)$为距离函数. 称

$$\delta(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}d(x,B),\quad \sup_{y\in B}d(y,A)\},$$

为A、B间的Hausdorff距离. 对$G\subset X$, 令

$$I_*(G)=\{A\in\mathsf{P}_f(X);\quad A\cap G\neq\phi\}.$$

记J为X上由范数生成的拓扑, 令

$$J_*^{\prime}=\{I_*(G);\quad G\in J\},$$

以J_*为子基的$\mathsf{P}_f(X)$上的拓扑称为下拓扑, 记为J_l. 由J_l生成的Borel σ–代数记为$\sigma(J_*)$.

对$A\subset X$, $A\neq\phi$, 称$\sigma(x^*,A)=\sup\{<x^*,x>;\quad x\in A\}$, $x^*\in X^*$ 为A的支撑函数.

设$F:\quad\Omega\to\mathsf{P}_f(X)$为集值映射, 对任意的$A\subset X$, $A\neq\phi$, 令$F^{-1}(A)=\{\omega:\quad\omega\in\Omega,\quad F(\omega)\cap A\neq\phi\}$. 若对任意开集$G\subset X$, 都有$F^{-1}(G)\in\mathcal{F}$, 则称$F$为$\mathcal{F}$可测的随机集, 其全体记为$M[\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_jX]$, 简记为$M[\Omega;\ X]$. 对$F\in M[\Omega;\ X]$, 称

$$G(F)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X:\quad x\in F(\omega)\}$$

本文1998年2月10日收到.

为 F 的图.

令 $L^1(\omega,\mathcal{F},\mathsf{P};\ X)$ 为 $\Omega\to X$ 的 $\mathcal{F}$ 可测的 Bochner 可积的 X 值函数全体, 简记为 $L^1(\Omega;X)$, 而记 $L^1=L^1(\Omega;R)$. 对 $A\subset X$, 记

$$|A|=\sup\{\|x\|:\ x\in A\}.$$

对 $F\in M[\Omega;X]$, 令

$$S_F^1=\{f\in L^1(\Omega;X):\ f(\omega)\in F(\omega),\ a.s.\}.$$

令

$$\mathcal{L}_f^1[\Omega;\ X]=\{F\in M[\Omega;X]:\ F(\omega)\in \mathsf{P}_f(X),\ a.s.\ 且\ |F|\in L^1\};$$
$$\mathcal{L}_{fc}^1[\Omega;\ X]=\{F\in \mathcal{L}_f^1[\Omega;X]:\ 且\ F(\omega)\in \mathsf{P}_{fc}(X),\ a.s.\}.$$

记 $\sigma(F)$ 为由 $F\in M[\Omega;X]$ 生成的 σ–代数.

设 $T\subset R_+$ 为一指标集, 对任意的 $t\in T$, 令

$$N_t=\sigma(F_s;s\le t,s\in T)=\bigvee_{s\in T;s\le t}\sigma(F_s);$$
$$N^t=\sigma(F_s;s\ge t,s\in T)=\bigvee_{s\ge t,s\in T}\sigma(F_s).$$

称 $\{F_t,\ t\in T\}$ 为 $\mathsf{P}_f(X)$–值随机过程, 如果对任意的 $t\in T$, $F_t\in M[\Omega;X]$. $\mathsf{P}_f(X)$–值 (或 $\mathsf{P}_{fc}(X)$–值, 或 $\mathsf{P}_{wkc}(X)$ 值) 随机过程统称集值随机过程.

随机集的积分、条件期望等可见 [1].

§2. 集值马尔可夫过程的定义及其等价条件

如同马尔可夫过程在随机过程理论中的重要地位一样, 集值马尔可夫过程在集值随机过程理论中的重要性是毋容置疑的. 但由于种种原因, 到目前为止, 集值马尔可夫过程能见到的研究成果不多, 就连它的定义, 至今未能有统一的处理, 使研究工作感到困难. 本节从最简单的定义出发, 在相当宽的条件下, 证明它与目前见到的两种定义的等价性, 从而可对这类过程的实质有较为完整的认识.

定义 2.1: 设 $\{F_t;\ t\in T\}$ 是 $\mathsf{P}_f(X)$–值随机过程, 若对任意有限个 $t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$, $t_k\in T$, $k=1,2,\cdots,n$, 及 $\mathcal{U}\in\sigma(J_*)$, 都有

$$\mathsf{P}(F_{t_n}\in\mathcal{U}|\bigvee_{k=1}^{n-1}\sigma(F_{t_k}))=\mathsf{P}(F_{t_n}\in\mathcal{U}|\sigma(F_{t_{n-1}}))\qquad a.s. \tag{2.1}$$

则称 $\{F_t,\ t\in T\}$ 为集值马尔可夫过程, 简称集值马氏过程, 条件 (2.1) 称为马氏性.

下面的定理是基本的, 它证明了定义 2.1 与 [1]、[3] 的马氏过程定义的等价性.

定理 2.1: 设 $\{F_t;\ t\in T\}$ 是 $\mathsf{P}_f(X)$–值随机过程, 则下列命题等价:

(i) $\{F_t;\ t\in T\}$ 满足 (2.1);

(ii)[1][2] 对任意的 $F\in\mathcal{L}_f^1[\Omega,\sigma(F_s),\ \mathsf{P};\ X]$, $s\ge t$, $s,t\in T$, 有

$$\mathsf{E}[F|N_t]=\mathsf{E}[F|\sigma(F_t)],\qquad a.s. \tag{2.2}$$

(iii)[3] 对任意的 $F \in \mathcal{L}_f^1[\Omega,\ N^t,\ \mathsf{P};\ X]$, $t \in T$, 有

$$\mathsf{E}[F|N_t] = \mathsf{E}[F|\sigma(F_t)], \qquad a.s. \tag{2.3}$$

证: (iii) $\Rightarrow$ (ii) 显然. (ii) $\Rightarrow$ (i) 可用 [3] 定理 1.1 的方法及实值随机变量的条件期望的平滑性得到. 下面证明 (i) $\Rightarrow$ (iii). 分以下五步: 设(i)成立, 则

(一) 对任意 $s \geq t,\ s, t \in T,\ \mathcal{U} \in \sigma(J_*)$, 有

$$\mathsf{P}(F_s \in \mathcal{U}|N_t) = \mathsf{P}(F_s \in \mathcal{U}|\sigma(F_t)). \qquad a.s. \tag{2.4}$$

(二) 任给有限个值 $t \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_m,\ s_k \in T,\ \mathcal{U}_k \in \sigma(J_*)$, 有

$$\mathsf{P}(F_{s_k} \in \mathcal{U}_k,\ k = 1, \cdots, m|N_t) = \mathsf{P}(F_{s_k} \in \mathcal{U}_k,\ k = 1, \cdots, m|\sigma(F_t)). \quad a.s. \tag{2.5}$$

(三) 任给 $A \in N^t$, 有

$$\mathsf{P}(A|N_t) = \mathsf{P}(A|\sigma(F_t)). \qquad a.s. \tag{2.6}$$

(四) 任给 $f \in L^1[\Omega, N^t, \mathsf{P}; X]$, 有

$$\mathsf{E}(f|N^t) = \mathsf{E}(f|\sigma(F_t)). \qquad a.s. \tag{2.7}$$

(五) 任给 $F \in \mathcal{L}_f^1[\Omega, N^t, \mathsf{P}; X]$, 有 $\mathsf{E}[F|N_t] = \mathsf{E}[F|\sigma(F_t)]. \qquad a.s.$

(一)、(二)、(三) 的证明完全类似于 [4] 对实值马氏过程所用的方法, 不再重复. 现证明 (四) 成立.

设 $f \in L^1[\Omega, N^t, \mathsf{P}; X]$, 因 X 可分, 故存在 X 值 N^t 可测简单随机元列 $\{f_n;\ n \geq 1\}$, 使

$$||f - f_n||_1 \to 0, \qquad (n \to \infty).$$

对 $n \geq 1$, 设 $f_n = \sum\limits_{k=1}^{m_n} x_{hk} I_{A_{nk}}$, 这里 $\{A_{nk},\ k = 1, 2, \cdots, m_n\}$ 是 Ω 的一个 N^t 可测分割. 由 Bochner 积分定义及 (三), 对任意 $A \in N_t$,

$$\begin{aligned}
\int_A f dp &= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dp = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_{nk} \int_A I_{A_{nk}} dp \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_{nk} \int_A \mathsf{P}(A_{nk}|N_t) dp = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_{nk} \int_A \mathsf{P}(A_{nk}|\sigma(F_t)) dp \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_{nk} \int_A \mathsf{E}(I_{A_{nk}}|\sigma(F_t)) dp = \lim_{n\to\infty} \int_A \mathsf{E}(f_n|\sigma(F_t)) dp.
\end{aligned}$$

又

$$\int_A ||\mathsf{E}(f_n|\sigma(F_t)) - \mathsf{E}(f|\sigma(F_t))|| dp \leq \int_A ||f_n - f|| dp \longrightarrow 0, \qquad (n \to \infty)$$

故

$$\int_A f dp = \int_A \mathsf{E}(f|\sigma(F_t)) dp,$$

由 $A \in N_t$ 的任意性, (四) 得证.

(五) 设 $F \in \mathcal{L}_+^1[\Omega, N^t, \mathsf{P}; X]$, 由 [7] 定理 2.1 知

$$\mathsf{E}[F|N_t] = ecl\{\mathsf{E}[f|N_t]:\ \ f \in S_F^1\}.$$

于是由[1]定理5.3.4知存在$\{f_{1n}\in S_F^1,\ \ n\geq 1\}$, 使有

$$\mathsf{E}[F|N_t]=cl\{\mathsf{E}[f_{1n}|N_t]:\ \ n\geq 1\},\qquad a.s.$$

同理知存在$\{f_{2n}\in S_F^1,\ \ n\geq 1\}$, 使有

$$\mathsf{E}[F|\sigma(F_t)]=cl\{\mathsf{E}(f_{22n}|\sigma(F_t):\ \ n\geq 1\}\qquad a.s.$$

记$\{f_n:\ \ n\geq 1\}=\{f_{1n},\ f_{2n}:\ \ n\geq 1\}$, 由(四)可得

$$\mathsf{E}[F|N_t]=cl\{\mathsf{E}[f_n|N_t]:\ \ n\geq 1\}=cl\{\mathsf{E}[f_n|\sigma(F_t)]:\ \ n\geq 1\}=\mathsf{E}[F|\sigma(F_t)]\qquad a.s.$$

(五)得证.

注. 由定理2.1可知, 由定义2.1出发, 在不附加条件(如X^*可分)下, [1]、[3]的相应等价命题都能成立, 因此定理2.1也是[1]、[3]相应结论的推广.

§3. 集值马尔可夫过程与其某些数值特征过程的关系

关于集值马尔可夫过程与其某些数值特征(如距离函数、支撑函数)过程的关系, 在[1]、[3]中都有论述, 但均存在不确切的地方, 如

(A) [1]定理3.1.11后的注认为: 对任意$x^*\in X^*$, $\{\sigma(x^*,F_t(\omega));\ \ t\in T\}$的马氏性较$\{F_t;\ \ t\in T\}$的马氏性条件弱. 换句话说, 若过程$\{F_t;\ \ t\in T\}$为$\mathsf{P}_f(X)$-值马氏过程, 则$\{\sigma(x^*,F_t);\ \ t\in T\}$必为实值马氏过程, 此结论在[3]定理3.2中同样可以见到;

(B) [3]定理3.1认为: 若X^*可分, $\{F_t;\ \ t\in T\}$为$\mathsf{P}_f(X)$-值马氏过程, 则对任意$x\in X$, $\{d(x,F_t);t\in T\}$为实值马氏过程.

事实上, 从下面的例子可见, (A)、(B)都是不正确的.

设ξ为服从[0,1]上均匀分布的实随机变量, 令

$$\eta_n=0\cdot I_{\{0\leq\xi\leq 1/2^n\}}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\{k/2^n<\xi\leq(k+1)/2^n\}},\qquad n=1,2,\cdots;$$

$$\zeta_n=\frac{1}{2^n}I_{\{0\leq\xi\leq 1/2^n\}}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{k+1}{2^n}I_{\{k/2^n<\xi\leq(k+1)/2^n\}},\qquad n=1,2,\cdots.$$

$$F_n=[\eta_n,\zeta_n],\qquad n=1,2,\cdots.$$

则$\{F_n,\ \ n\geq 1\}$为$\mathsf{P}_f(R)$值随机序列. 且

$$\bigvee_{k=1}^n\sigma(F_k)=\sigma(F_n)=\bigvee_{k=1}^n\sigma(\eta_k)=\sigma(\eta_n)=\bigvee_{k=1}^n\sigma(\zeta_k)=\sigma(\zeta_n).$$

当n增大时不减, 故$\{f_n,\ \ n\geq 1\}$为$\mathsf{P}_f(R)$值马氏序列. 现作另一序列: 任取$n_2>n_1>2$, 令

$$\eta_n'=\begin{cases}\eta_n, & \text{当}\ \ n\neq n_1\\ \eta_1, & \text{当}\ \ n=n_1\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots;$$

$$\zeta_n'=\begin{cases}\zeta_n, & \text{当}\ \ n\neq n_2\\ \zeta_1, & \text{当}\ \ n=n_2\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots;$$

$$F_n'=[\eta_n',\zeta_n'],\qquad n=1,2,\cdots;$$

则

$$\sigma(F_n')=\bigvee_{k=1}^n\sigma(F_k')=\sigma(F_n).$$

故 $\{F'_n,\ n\geq 1\}$ 为马氏序列．但 $\{\eta'_n,\ n\geq 1\}$, $\{\zeta'_n,\ n\geq 1\}$ 均非实值马氏序列．事实上, 当 $n_1>2$ 时有

$$\mathrm{P}(\eta'_{n_1+1}=\frac{1}{2^{n_1+1}}|\eta'_{n_1-1}=\frac{1}{2^{n_1-1}},\ \eta'_{n_1}=0)=\frac{\mathrm{P}(\frac{1}{2^{n_1+1}}<\xi\leq\frac{2}{2^{n_1+1}})}{\mathrm{P}(\frac{1}{2^{n_1-1}}<\xi\leq\frac{2}{2^{n_1-1}})}=\frac{2^{n_1-1}}{2^{n_1+1}}=\frac{1}{4},$$

但

$$\mathrm{P}(\eta'_{n_1+1}=\frac{1}{2^{n_1+1}}|\eta'_{n_1}=0)=\frac{\mathrm{P}(\frac{1}{2^{n_1+1}}<\xi\leq\frac{2}{2^{n_1+1}})}{\mathrm{P}(0<\xi\leq\frac{1}{2})}=\frac{1}{2^{n_1}}<\frac{1}{4},$$

故 $\{\eta'_n,\ n\geq 1\}$ 不是实值马氏序列．同理可证 $\{\zeta'_n,\ n\geq 1\}$ 不是实值马氏序列．

令 $X=R$, 则 X^* 可分, $\{F'_n,\ n\geq 1\}$ 是 $\mathrm{P}_f(X)$ 值马氏序列, 取 $x_0^*\in X^*$ 为单位算子, 即对任意 $x\in X$, $<x_0^*,\ x>=x$. 则 $\sigma(x_0^*,F'_n(\omega))=\zeta'_n(\omega),\quad \omega\in\Omega$. 但 $\{\sigma(x_0^*,F_n),\ n\geq 1\}$ 不是实值马氏序列, 故 (A) 不成立．

取 $x=0$, 则 $d(x,\ F'_n)=\eta'_n$, $\{d(x,F'_n),\ n\geq 1\}$ 不是实值马氏序列, 故 (B) 不成立．

为建立集值马氏过程与其距离函数、支撑函数过程的等价关系, 先给出两个引理．

引理 3.1:[3] 设 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 为 X 的可数稠子集, 则对任意 $F\in M[\Omega;\ X]$, 有

$$\sigma(F)=\sigma(d(x_k,\ F),\ k=1,2,\cdots)=\bigvee_{k=1}^{\infty}\sigma(d(x_k,F)) \tag{3.1}$$

下面的引理将 [3] 的 $M_{(\omega)kc}[\Omega;X]$ 条件加以推广．

引理 3.2: 设 X^* 可分, $\{x_1^*,x_2^*,\cdots\}$ 是 X^* 的可数稠子集, 则对任意的 $F\in M_{fc}[\Omega;\ X]$, 有

$$\sigma(F)=\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ \ k\geq 1)=\bigvee_{k=1}^{\infty}\sigma(\sigma(x_k^*,F)). \tag{3.2}$$

证: 设 $F\in M_{fc}[\Omega;X]$. 则对任意的 $x^*\in X^*$, $\sigma(x^*,F)$ 关于 $\sigma(F)$ 可测, 故

$$\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ \ k\geq 1)\subset\sigma(F).$$

另一方面, 因 $\{x_1^*,x_2^*,\cdots\}$ 是 X^* 的可数稠集, 取定 x_k^*, 由 [1] 定理 2.1.18,

$$F(x_k^*,\omega)=\{x:\ <x_k^*,x>\leq\sigma(x_k^*,F(\omega))\}$$

为 $\sigma(\sigma(x_k^*,F)))$ 可测的随机集．故 $F(x_k^*,\omega)$ 为 $\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ k\geq 1)$ 可测的随机集．由 [4] 定理 1.0,

$$G(F(x_k^*,\cdot))=\{(\omega,x)\in\Omega\times X:\ \ x\in F(x_k^*,\omega)\}\in\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ k\geq 1)\times\mathcal{B}_X,$$

故

$$G(\bigcap_{k=1}^{\infty}F(x_k^*,\cdot))=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{(\omega,x)\in\Omega\times X:\ \ x\in F(x_k^*,\omega)\}\in\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ k\geq 1)\times\mathcal{B}_X,$$

故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F(x_k^*,\cdot)$ 为 $\sigma(\sigma(x_k^*,F),\ k\geq 1)$ 可测的随机集．

因 F 取值于 $\mathrm{P}_{fc}(X)$, 由 [1] 定理 1.4.7, 对 $\omega\in\Omega$,

$$F(\omega)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in X;\ \ <x_k^*,x>\leq\sigma(x_k^*,F(\omega))\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}F(x_k^*,\omega).$$

故 F 关于 $\sigma(\sigma(x_k^*, F),\ k \geq 1)$ 可测, 即 $\sigma(F) \subset \sigma(\sigma(x_k^*, F),\ k \geq 1)$. 引理得证.

定理 3.1: 设 $\{F_t,\ t \in T\}$ 是 $\mathsf{P}_f(X)$ 值随机过程, 则它是 $\mathsf{P}_f(X)$ 值马氏过程的充要条件是

$$\{(d(x_1,\ F_t),\ d(x_2,\ F_t), \cdots),\quad t \in T\}$$

是以 $(R^N, \mathcal{B}^N)$ 为状态空间的马氏过程, 其中 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为 X 的可数稠子集.

证: 令 $d(t,\omega) = (d(x_1, F_t(\omega)), d(x_2, F_t(\omega)), \cdots),\quad \omega \in \Omega$

$$\widetilde{N}_t = \sigma(d(s,\cdot),\ s \leq t),\qquad t \in T, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{N}^t = \sigma(d(s,\cdot),\ s \geq t),\qquad t \in T. \tag{3.4}$$

必要性. 任取 $\xi \in L^1[\Omega, \widetilde{N}^t, \mathsf{P}; X]$, 由引理 3.1,

$$\sigma(F_t) = \sigma(d(t,\cdot)),\qquad N_t = \widetilde{N}_t,\qquad N^t = \widetilde{N}^t, \tag{3.5}$$

故 $\xi \in L^1[\Omega, N^t, \mathsf{P}; X]$,, 因 $\{F_t,\ t \in T\}$ 为 $\mathsf{P}_f(X)$ 值马氏过程, 由定理 2.1,

$$\mathsf{E}(\xi|\widetilde{N}_t) = \mathsf{E}(\xi|\sigma(F_t))\qquad a.s. \tag{3.6}$$

由 (3.5)、(3.6) 得 $\mathsf{E}(\xi|\widetilde{N}_t) = \mathsf{E}(\xi|N_t) = \mathsf{E}(\xi|\sigma(F_t)) = \mathsf{E}(\xi|\sigma(d(t)))$ $a.s.$ 再由定理 2.1 知 $\{d(t,\cdot),\ t \in T\}$ 是以 $(R^N, \mathcal{B}^N)$ 为状态空间的马氏过程.

充分性类似可证.

定理 3.2: 设 X^* 可分, $\{x_k^*, k \geq 1\}$ 为 X^* 的可数稠子集, $\{F_t, t \in T\}$ 是 $\mathsf{P}_{fc}(X)$ 值随机过程, 则 $\{F_t, t \in T\}$ 是马氏过程的充要条件是: $\{(\sigma(x_1^*, F_t), \sigma(x_2^*, f_t), \cdots),\quad t \in T\}$ 是以 $(R^N, \mathcal{B}^N)$ 为状态空间的马氏过程.

证明完全类似于定理 3.1, 故从略.

参 考 文 献

[1] 张文修、汪振鹏、高勇, 集值随机过程, 科学出版社, 1996.

[2] 张文修、聂赞坎、高勇, 集值随机过程 — 一般理论与集值鞅, 工程数学学报, **8**(3)(1991), 1–30.

[3] Xu Mingyue (徐明跃), Set-valued Markov processes and their representation theorems northeast, Math. J., **12**(2)(1996), 171–182.

[4] 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, 1978.

[5] Hiai, F. & Umeqaki, H. Inteqrals, Conditional expectations and martingales of multivalued functions, J. Multi. Anal., **7**(1977), 149–182.

[6] 吴智泉、王向忱, 巴氏空间上的概率论, 吉林大学出版社, 1990.

[7] Wang Rongming, Wang Zhengpeng, Doob's stopping theorem for set-valued (super, sub) martingales with discrete parameters, 应用概率统计, **14**(1997), 203–212.

The Definition of Set–Valued Markov Processes and the Relative Problems

ZHENG JING　　　ZHU ZUOBIN

(Anhui Normal University, Wuhu, 241000)　*(Ningbo University, Ningbo, 315211)*

In this paper, we started from the simplest definition of Set-Valued Markov Processes, proved the equivalence of it and some others ([1], [3]). In addition, we study the relation between Markov property of Set-Valued Process and that of its real valued characters.

Keywords: Set-Valued Markov Process, distance function, support function.