应用概率统计 第九卷
第四期 1993年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 9 No. 4, Nov., 1993

反射扩散过程的某些极限定理

区景祺 石北源
(中山大学，广州，510275)

摘 要

设(X_t)是由如下随机微分方程所决定的反射扩散过程：

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t b(X_s)ds + L_t - U_t, \\ L_t = \int_0^t I_{\{0\}}(X_s)dL_s, \\ U_t = \int_0^t I_{\{1\}}(X_s)dU_s. \end{cases}$$

本文证明了当$t\to\infty$时，$P_x\{X_t\in A\}\to\pi(A)$，$\frac{1}{t}E_x(L_t)\to\alpha$，$\frac{1}{t}E_x(U_t)\to\beta$，其中

$$\alpha = \left(\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt\right)^{-1},$$

$$\beta = \alpha\exp\left\{\int_0^1 \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\},$$

和

$$\int_0^1 e^{\lambda y}\pi(dy) = \frac{\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds + \lambda t\right\}dt}{\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt}.$$

§1. 引 言

扩散过程历经与Itô点过程之间的关系已经为很多作者研究过，这方面有关定义与结果可以参看[2]与[3]. [7]中考虑了与反射Brown运动有关系的另一种点过程，它由反射Brown运动部分历经点组成，是一个简单点过程；反射Brown运动的某些极限性态与此有关.

本文试图将[7]的结果推广到由瞬时反射边界条件随机微分方程所确定的双反射壁扩散过程情形.

§2. 主 要 结 果

设$\sigma(x)$，$b(x)$为$[0, 1]$上的可测函数，考虑具双边瞬时反射边界条件的随机微分方程

本文1991年3月23日收到.

$$
\begin{cases}
X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s + \int_0^t b(X_s)ds + L_t - U_t, \\
L_t = \int_0^t I_{\{0\}}(X_s)dL_s, \\
U_t = \int_0^t I_{\{1\}}(X_s)dU_s, \quad t \geqslant 0
\end{cases} \tag{1}
$$

如果在某一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}; P)$上，存在连续、适应且取值于$[0, 1]$的过程$(X_t)$, Brown 运动$(W_t)$, 及连续非减适应、零初值的过程$(L_t)$与$(U_t)$使关系式(1)成立，则称三元组$(X_t, L_t, U_t)$为方程(1)的解；如果此三元组又对$\mathscr{F}_t^{x_0, w} = \sigma(X_0, W_s, s \leqslant t)$适应，这个解称为强解.

如记$C = C([0, \infty))$为$[0, \infty)$上全体连续函数所成空间，取$\Omega = C \times C \times C \times C$, $\mathscr{F}$为Ω上 Borel 集族；对每$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega$, 设坐标过程$X_t(\omega) = \omega_1(t)$, $L_t(\omega) = \omega_2(t)$, $U_t(\omega) = \omega_3(t)$, 及$W_t(\omega) = \omega_4(t)$; $\mathscr{F}_t = \sigma(\omega(s), s \leqslant t)$. 方程(1)有解相当于在此可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上存在概率测度$P$, 使得$(W_t)$是 Brown 运动及$(X_t, L_t, U_t)$是方程(1)的解. 下文如无特别声明，$\Omega$, $\mathscr{F}$, $(\mathscr{F}_t)$, (X_t), (U_t), (L_t)及(W_t)均按此定义.

(1)中后两个式意味着：L_t仅在$\{t: X_t = 0\}$处增加，U_t仅在$\{t: X_t = 1\}$处增加.

本文恒设σ, b满足条件

$$
|\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leqslant K|x - y|, \tag{2}
$$

$$
\sigma^2(x) \geqslant \sigma > 0, \ \forall x, \ y \in [0, 1] \tag{3}
$$

由条件(2)知方程(1)存在唯一强解，而由(3)知以概率1成立([5])

$$
\mathrm{mes}\{t: X_t = 0 \text{ 或 } 1\} = 0.
$$

本文考虑的双反射壁扩散过程就是指(X_t).

设初值为$x \in [0, 1]$, 使得坐标过程(W_t)为 Brown 运动，坐标过程三元组(X_t, L_t, U_t)为解的概率测度记为P_x. (X_t, L_t, U_t)的极限性态与如下的停时列有关. 令

$$
T_0 = \inf\{t \geqslant 0, \ X_t = 0\},
$$

$$
T_1 = \inf\{t > T_0, \ X_t = 0, \text{ 且 } X_s = 1 \text{ 对某个 } s \in (T_0, t)\},
$$

……

$$
T_n = \inf\{t > T_{n-1}, \ X_t = 0, \text{ 且 } X_s = 1 \text{ 对某个 } s \in (T_{n-1}, t)\},
$$

……

及令$\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, $\tau = \tau_1$.

定理1 设A为$[0, 1]$中的 Borel 可测子集，则

$$
P_x\{X_t \in A\} \to \pi(A), \text{ 当 } t \to \infty, \tag{4}
$$

$$
\frac{1}{t} E_x(L_t) \to \alpha, \text{ 当 } t \to \infty, \tag{5}
$$

$$
\frac{1}{t} E_x(U_t) \to \beta, \text{ 当 } t \to \infty, \tag{6}
$$

其中

$$
\pi(A) = \frac{E_0\left\{\int_0^\tau I_A(X_t)dt\right\}}{E_0\tau}, \quad \alpha = \frac{E_0 L_\tau}{E_0\tau}, \quad \beta = \frac{E_0 U_\tau}{E_0\tau}.
$$

我们通过一系列引理来完成定理的证明. 这些引理牵涉到带双反射壁扩散过程的强马氏

性，转移密度的存在性及首中时的某些性质．在有关文献中还未见过，有其独立的意义．

设 T 为有限停时，记

$$\tilde{X}_t=X_{T+t},\ \tilde{L}_t=L_{T+t}-L_T,\ \tilde{U}_t=U_{T+t}-U_T.$$

引理1 设 $K: C\times C\times C\to R^1$ 为可测映射，及 $x\in[0, 1]$

$$E_x|K(X.,\ L.,\ U.)|<\infty,$$

则

$$E_x[K(\tilde{X}.,\ \tilde{L}.,\ \tilde{U}.)|\mathscr{F}_T^W]=E_x[K(X.,\ L.,\ U.)|X_T]. \tag{7}$$

证 由方程的齐次性不难看出$(\tilde{X}_t,\ \tilde{L}_t,\ \tilde{U}_t)$与$(W_{T+t}-W_T)$满足方程(1)，初值为 X_T．由于方程(1)存在唯一强解，故知(参看[3]、[8]、[1])存在可测映射 $f,\ g,\ h: R^1\times C\to C$，使

$$\begin{aligned}
&X.=f(x, W.),\ \tilde{X}.=f(X_T,\ W_{T+}.-W_T),\\
&L.=g(xW, .),\ \tilde{L}.=g(X_T,\ W_{T+}.-W_T),\\
&U.=h(x,\ W.),\ \tilde{U}.=h(X_T,\ W_{+T}.-W_T).
\end{aligned}$$

令 $\Lambda=K(f,\ g,\ h)$，则 $\Lambda: R^1\times C\to R^1$为可测泛函，而待证的(7)式变为

$$E_x[\Lambda(X_T,\ W_{T+}.-W_T)|\mathscr{F}_T^W]=E_x[\Lambda(x,\ W.)|X_T]. \tag{8}$$

由于 X_T 对$\mathscr{F}_T^W$ 可测及每 $W_{T+t}-W_T$ 对$\mathscr{F}_T^W$ 独立，故由[5]第3章§10引理1可得

$$E_x[\Lambda(X_T,\ W_{T+}.-W_T)|\mathscr{F}_T^W]=E_x[\Lambda(X_T,\ W_{T+}.-W_T)|X_T].$$

而由解的齐次性及$(W_{T+t}-W_T)$也是 Brown 运动，

$$E_x[\Lambda(X_T,\ W_{T+}.-W_T)|X_T]=E_x[\Lambda(X,\ W.)|X_T].$$

于是(8)式成立．引理得证．

引理2 $\{T_n\}$为简单点过程，且

$$T_0<T_1<\cdots<T_n<\infty,\quad \text{a.s.}.$$

证 只要证 $T_n<\infty$, a.s.．用归纳法．设 $T_n<\infty$, a. s.．往证 $T_{n+1}<\infty$, a.s.．令

$$S_n=\inf\{t>T_n,\ X_t=1\},$$
$$R_n=\inf\{t>0,\ X_{T_n+t}=1\},$$

则 $S_n=R_n+T_n$．令

$$X_t^{(n)}=X_{T_n+t},\ U_t^{(n)}=U_{T_n+t}-U_{T_n},$$
$$W_t^{(n)}=W_{T_n+t}-W_{T_n},\ L_t^{(n)}=L_{T_n+t}-L_{T_n}.$$

不难看出$(X_t^{(n)},\ L_t^{(n)},\ U_t^{(n)})$与$(W_t^{(n)})$ 满足方程(1)且初值 $X_{T_n}=0$．令 $f(x)=e^{\lambda x}$，λ 待定．由 Itô 公式，

$$\begin{aligned}
f(X_t^{(n)})-f(0)=&\int_0^t\sigma(X_s^{(n)})f'(X_s^{(n)})dW_s^{(n)}+\int_0^t\Big\{\frac{1}{2}\,\sigma^2(X_s^{(n)})f''(X_s^{(n)})\\
&+b(X_s^{(n)})f'(X_s^{(n)})\Big\}ds+\int_0^t f'(X_s^{(n)})dL_s^{(n)}\\
&-\int_0^t f'(X_s^{(n)})dU_s^{(n)}.
\end{aligned}$$

注意 $U_s^{(n)}=0$ 于$\{s<R_n\}$处，及 $L_s^{(n)}$ 仅于 $X_s^{(n)}=0$ 时增加，于是

$$\begin{aligned}
E_xf(X_{t\wedge R_n}^{(n)})-f(0)=&E_x\int_0^{t\wedge R_n}\Big\{\frac{1}{2}\,\sigma^2(X_s^{(n)})f''(X_s^{(n)})+b(X_s^{(n)})f'(X_s^{(n)})\Big\}ds\\
&+f'(0)E_x(L_{t\wedge R_n}),
\end{aligned}$$

取充分大的 λ 使(由于 $\sigma^2(x)\geqslant\sigma>0$)

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)+b(x)f'(x)=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\lambda^2e^{\lambda x}+b(x)\lambda e^{\lambda x}\geqslant 1.$$

顾及 $f(X^{(n)}_{t\wedge R_n})\leqslant f(1)$ 及 $L_{t\wedge R_n}\geqslant 0$，便得

$$f(1)-f(0)\geqslant E_x(t\wedge R_n).$$

令 $t\to\infty$ 得 $E_xR_n<\infty$，从而 $R_n<\infty$, a. s.. 于是由 $T_n<\infty$, a. s. 推得 $S_n<\infty$, a.s..

其次有 $$T_{n+1}=\inf\{t>s_n,\ X_t=0\}.$$

于是同法可由 $S_n<\infty$, a. s. 推得 $T_{n+1}<\infty$, a.s. 因而引理 2 得证.

引理 3 $\tau_1=T_1-T_0$, $\tau_2==T_2-T_1$, $\cdots$, $\tau_n=T_n-T_{n-1}$, $\cdots$是相互独立且同分布.

证 我们有

$\tau_n=\inf\{t>0;\ X_{T_{n-1}+t}=0$ 及 $X_{T_{n-1}+s}=1$ 对某个

$S\in(0,\ t)\}$，

于是 τ_n 是轨道 $X_{T_{n-1}+\cdot}$ 的可测泛函，我们可以记

$$e^{i\lambda\tau_n}=K(X_{T_{n-1}+\cdot}),$$

其中 $K: C\to R^1$ 为可测泛函. 由引理 1 知

$$E_x[e^{i\lambda\tau_n}|\mathscr{F}^W_{T_{n-1}}]=E_x[K(X_{T_{n-1}+\cdot})|\mathscr{F}^W_{T_{n-1}}]=E_{XT_{n-1}}[K(X_\cdot)]=E_0e^{i\lambda\tau_1}.$$

由此知 τ_n 与 $\mathscr{F}^W_{T_{n-1}}$ 独立，且与 τ_1 同分布. 从而 τ_1, τ_2, $\cdots$, τ_n, $\cdots$相互独立同分布.

引理 4 令

$$L^*_n=L_{T_n}-L_{T_{n-1}},\ U^*_n=U_{Tn}-U_{T_{n-1}},\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则$\{L^*_1,\ L^*_2,\ \cdots\}$与$\{U^*_1,\ U^*_2,\ \cdots\}$都是独立同分布序列，且分布不依赖于 x.

证 由引理 1 直接可得.

引理 5 令

$$p(t,\ x,\ dy)=p_x(X_t\in dy)$$

则当 $t>0$ 时，转移概率密度存在：$p(t,\ x,\ dy)=p(t,\ x,\ y)dy$.

证 我们将方程(1)的系数 $\sigma(x)$, $b(x)$作如下延拓：

$\bar\sigma(x)=\sigma(-x)$, $\bar b(x)=-b(-x)$, 当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$\bar\sigma(x+2k)=\bar\sigma(x)$, $\bar b(x+2k)=\bar b(x)$, 对一切整数 k 及 $|x|\leqslant 1$. 于是 $\bar\sigma(x)$为 R^1 上有界连续函数且 $\bar\sigma^2(x)\geqslant\sigma>0$，而 $\bar b(x)$为 R^1 上有界可测函数，由[8]知方程

$$\overline{X}_t=x+\int_0^t\bar\sigma(X_s)d\overline{W}_s+\int_0^t\bar b(X_s)ds$$

存在唯一解，且当 $t\geqslant 0$ 时，$P(t,\ x,\ dy)=P_x(\overline{X}_t\in dy)$有密度 $\bar p(t,\ x,\ y)$.

以下按[5]第 4 章 § 23 的办法进行. 作函数

$$s(x)=\begin{cases}1, \text{当 } 2k\leqslant x<2k+1,\\ -1, \text{当 } 2k-1\leqslant x<2k,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.\end{cases}$$

$$R(x)=\int_0^x S(z)dz.$$

令
$$\hat X_t=R(\overline{X}_t),$$

$$\hat W_t=\int_0^t S(\overline{X}_s)d\hat W_s,$$

$$\hat L_t=\lim_{s\to0}\frac{1}{2s}\int_0^t I_{(s)}(X_s)\sigma^2(X_s)ds,$$

$$\hat{U}_t=\lim_{s\to 0}\frac{1}{2s}\int_0^t I_{(s)}(1-X_s)\sigma^2(X_s)ds.$$

则由[5]知($\hat{X}_t$, $\hat{L}_t$, $\hat{U}_t$)与($\hat{W}_t$)满足方程(1). 于是由解的唯一性便知

$$P(t,\ x,\ dy)=P_x(\hat{X}_t\in dy)=P_x(R(\overline{X}_t)\in dy).$$

设 A 为[0, 1]中的 Lebesgue 零测集, 则

$$P(t,\ x,\ A)=P_x(R(\overline{X}_t)\in A)=\sum_k P_x(\overline{X}_t\in A,\ 2k\leqslant\overline{X}_t<2k+1)$$
$$+\sum_k P_x(\overline{X}_t\in -A,\ 2k-1\leqslant\overline{X}_t\leqslant 2k)=0.$$

于是 $P(t,\ x,\ dy)$对 Lebesgue 测度绝对连续, 故存在密度.

引理 6 当 $t>0$ 时, $P_x(\tau_n=t)=0$.

证 由于

$$\int_0^1 P_y(\tau_n\leqslant t)dy\leqslant 1,\quad \forall t>0,$$

故至多有有限或可列个 s, 使

$$\int_0^1 P_y(\tau_n=s)dy>0.$$

从而在$(0,\ t)$中必存在 s, 使

$$\int_0^1 P_y(\tau_n=s)dy=0.$$

对 $a\geqslant 0$, 令

$$\tau_n^a=\inf\{t>a,\ X_{T_{n-1}+t}=0\text{ 且 }X_{T_{n-1}+s}=1\text{ 对某 }s\in(0,\ t)\},$$

则在$\{\tau_n>a\}$处, $\tau_n=\tau_n^a$. 如果记 $\tau_n=K(X_{T_{n-1}+\cdot})$, 则 $\tau_n^a=a+K(X_{T_n+a+\cdot})$, 于是有

$$\{\tau_n=t\}=\{\tau_n>t-s,\ \tau_n^{t-s}=t\}\subset\{\tau_n^{t-s}=t\}=\{K(X_{T_{n-1}+t-s+\cdot})=t\}.$$

由马氏性即得

$$P_x(\tau_n=t)\leqslant E_x\{E_x[I_{(t)}(K(X_{T_{n-1}+t-s})|\mathscr{F}_{t-s}]\}=E_x[P_{x_{t-s}}(\tau_n=s)]$$
$$=\int_0^1 p(t-s,\ x,\ y)P_y(\tau_n=s)dy=0.$$

在更生理论中([4]、[6]), 称正值随机变量 η 有算术分布(或格子点分布), 如果分布函数 $F(t)=P(y\leqslant t)$的增长点仅为集合$\{n\lambda:\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$, λ 为某正常数, 由引理 6 可看出, τ_1, $\cdots$, τ_n, $\cdots$ 有非算术分布, 故我们可以如[7]一样来证明定理, 由于上述引理已克服了主要困难, 定理的证明不过是更生理论几乎逐字逐句的重复, 因此下述的证明我们写得较为简略.

定理 1 的证明

不妨设 $x=0$, P_0 写为 P. 此时 $T_0=0$. 令 $F(t)=P(\tau\leqslant t)$, $F(t)$为非算术分布. 由引理 2 知

$$a=E\tau=\int_0^\infty tF(dt)<\infty.$$

我们有

$$P(X_t\in A)=P(X_t\in A,\ \tau>t)+P(X_t\in A,\ \tau\leqslant t).$$

应用引理 1, 对[0, 1]上的开集 A, 有

$$P(X_t\in A,\ \tau\leqslant t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n P\left(X_{\tau+t-\frac{k}{n}t}\in A,\ \frac{k-1}{n}t<\tau\leqslant\frac{k}{n}t\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n P\left(X_{t-\frac{kt}{n}}\in A\right)P\left(\frac{k-1}{n}t<\tau\leqslant\frac{k}{n}t\right)$$

$$=\int_0^t P(X_{t-s}\in A)F(ds),$$

应用单调类定理，因而对[0, 1]上任意 Borel 集 A 有

$$P(X_t\in A,\ \tau<t)=\int_0^t P(X_{t-s}\in A)F(ds).$$

由关键的更新定理(参见[4]、[6])知

$$P(X_t\in A)\to\frac{1}{a}\int_0^\infty P(X_t\in A,\ \tau>t)dt.$$

但

$$\int_0^\infty P(X_t\in A,\ \tau>t)\,dt=E\left[\int_0^\infty I_A(X_t)\,I_{(\tau>t)}dt\right]$$

$$=E\left[\int_0^\tau I_A(X_t)dt\right]=a\pi(A).$$

(4)式得证.

如同引理 4，令 $L_n^*=L_{T_n}-L_{T_{n-1}}$, $S_n=L_1^*+\cdots+L_n^*$, 及 $S_0=0$. 记

$$N(t)=\sum_{n=1}^\infty I_{(T_n<1)},$$

即 $N(t)$为对应于点过程$\{T_n\}$的计数过程，由引理 3 知它也是更新过程. 注意

$$S_{N(t)}\leqslant L(t)\leqslant S_{N(t)+1}.$$

于是

$$\frac{1}{t}E[S_{N(t)}]\leqslant\frac{1}{t}E[L(t)]\leqslant\frac{1}{t}E[S_{N(t)+1}].$$

按[4]78—79 页的方法，用 Wald 恒等式及更新定理可证上式左右端当 $t\to\infty$ 均趋于 $E[L_\tau]/E\tau$, (5)式得证. (6)式的证明是类似的，定理 1 得证.

§3. 极限分布的计算

本节试图研究

$$\alpha=\frac{E_0L_\tau}{E_0\tau},\quad \beta=\frac{E_0U_\tau}{E_0\tau},\quad \pi(A)=\frac{E_0\left\{\int_0^\tau I_A(X_t)dt\right\}}{E_0\tau}$$

的计算方法. 不妨设 $X=0$, 记概率测度 $P=P_0$. 于是

$$X_t=\int_0^t\sigma(X_s)dW_s+\int_0^t b(X_s)ds+L_t-U_t.$$

设 f: $R^1\to R^1$ 二次连续可微，由 Itô 公式有

$$f(X_t)-f(0)=\int_0^t\sigma(X_s)f(X_s)dW_s+\int_0^t\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)+b(X_s)f'(X)_s\right\}ds$$

$$+f'(0)L_t-f'(1)U_t.$$

注意 $X_\tau=0$, 便有

$$E\int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)+b(X_s)f'(X_s)\right\}ds+f'(0)EL_\tau-f'(1)EU_\tau=0$$

由 $\pi(\cdot)$的定义又可看出

$$E\int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(X_s)f''(X_s)+b(X_s)f'(X_s)\right\}ds$$

$$=E\tau\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(z)f''(z)+b(z)f'(z)\right\}\pi(dz).$$

由上面诸式可得

定理2 设 $f: R^1\to R^1$ 二次连续可微，则 α, β, $\pi(\cdot)$有如下关系

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y)+b(y)f'(y)\right\}\pi(dy)+\alpha f'(0)-\beta f'(1)=0. \tag{9}$$

如取 $f(y)=\int_0^y\exp\left\{-\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt$，并注意到此时

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y)+b(y)f'(y)=0,$$

$$f'(0)=1,\ f'(1)=\exp\left\{-\int_0^1\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}.$$

则由(9)可得

$$\alpha=\beta\exp\left\{-\int_0^1\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}. \tag{10}$$

其次，如令

$$f(y)=\int_0^y\left(\exp\left\{-\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\int_0^t\exp\left\{\int_0^u\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}du\right)dt,$$

此时有

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y)+b(y)f'(y)=1$$

$$f'(0)=0,\ f'(1)=\exp\left\{-\int_0^1\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt.$$

顾及(9)式，可得

$$\beta=\left(\exp\left\{-\int_0^1\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt\right)^{-1}.$$

而由(10)式便得

$$\alpha=\left(\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt\right)^{-1}.$$

最后，取

$$f(y)=\int_0^y\left(\exp\left\{-\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\cdot\int_0^t\exp\left\{\int_0^u\frac{2d(s)}{\sigma^2(s)}ds+\lambda u\right\}du\right)dt.$$

这时有

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y)+b(y)f'(y)=\exp\{\lambda y\}$$

$$f'(0)=0,\ f'(1)=\exp\left\{-\int_0^1\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds+\lambda t\right\}dt.$$

于是便得

$$\int_0^1 e^{\lambda y}\pi(dy)=\frac{\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds+\lambda t\right\}dt}{\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt}.$$

综合上述结果便得

定理3 极限值 α, β, $\pi(\cdot)$由下面显式确定：

$$\alpha=\frac{1}{\int_0^1\exp\left\{\int_0^t\frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt},$$

$$\beta = \frac{1}{\exp\left\{-\int_0^1 \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt},$$

而

$$\int_0^1 e^{\lambda y}\pi(dy) = \frac{\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds + \lambda t\right\}dt}{\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt}.$$

参 考 文 献

[1] R. J. Chitashvili, N. L. Lazrieva, Strong solutions of stochastic differential equations with boundary conditions. *Stochastic*, 1981, 5, 255—309.

[2] K. Itô, Poisson point processes attached to Markov processes, *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III*, 225—239.

[3] N. Ikeda, Sh. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion Processes, 1981, New York.

[4] G. Klimov, Probability theory and mathematical statistics, 1983.

[5] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[6] S. M. Ross, Stochastic processes, John Wiley & Snons, New York, 1983.

[7] J. M. Harrison, Brownian motion and stochastic flow systems, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[8] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional diffusion processes, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

SOME LIMIT THEOREMS OF REFLECTED DIFFUSION PROCESSES

QU JINGGI SHI BEIYUAN

(*Zhongshan University, Guangzhou*, 510275)

Let (X_t) be the reflected diffusion process governed by the S. D. E

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t b(X_s)ds + L_t - U_t, \\ L_t = \int_0^t I_{(0)}(X_s)dL_s, \\ U_t = \int_0^t I_{(1)}(X_s)dU_s. \end{cases}$$

In this paper we proved the limit theorem: $t\to\infty$, $P_x\{X_t\in A\}\to\pi(A)$, $\frac{1}{t}E_x[L_t]\to\alpha$, $\frac{1}{t}E_x[U_t]\to\beta$, where

$$\alpha = \left(\int_0^t \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt\right)^{-1},$$

$$\beta = \alpha\exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\},$$

aud

$$\int_0^1 e^{\lambda y}\pi(dy) = \frac{\int_0^1 \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds + \lambda t\right\}dt}{\int_0^t \exp\left\{\int_0^t \frac{2b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\}dt}.$$