

# 混料均匀设计\*

张金廷

(中国科学院应用数学所, 北京, 100080)

## 摘 要

本文详细讨论了获得混料均匀设计表的三种方法——变换法、迭代法和循环拉丁方型方法。作为迭代法的结果, 在附录, 本文给出了试验次数为  $4 \leq n \leq 11$  的改进后的混料均匀设计表。

## § 1. 引 言

混料设计又叫单纯形设计, 其试验区域为单纯形

$$T_s = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \mid \sum_{i=1}^s x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \right\} \quad (1.1)$$

混料设计的主要任务是在  $T_s$  上设置试验点。关于  $T_s$  上试验点的设置, Scheffé 提出了单纯形网格法和单纯形重心法(cf. [5], [6])。前者是在  $T_s$  上打网格, 以网格点为试验点, 后者以  $T_s$  的重心及其低维边界面的重心为试验点, 王、方在[11]中提出另一种在  $T_s$  上设置试验点的方法, 这就是本文将要详细讨论的变换法, 即混料均匀设计的一般方法。混料均匀设计的基本思想是对给定的每因素的水平数  $n$ , 在  $T_s$  上找出  $n$  个最有代表性的试验点, 即在  $T_s$  上散布最均匀的  $n$  个点。

与单纯形网格法和单纯形重心法相比较, 混料均匀设计的试验点设置更具代表性和灵活性, 而且试验点数即试验次数较少, 与每因素的水平数  $n$  一致。

相对于混料均匀设计, [1]中讨论的均匀设计称作矩形均匀设计, 因它的试验区域都是矩形。就矩形均匀设计表  $U_n(n^s)$  而言, 其试验区域相当于  $[1, n]^s$ , 这里  $s$  是因素个数,  $n$  为每一因素的水平数, 也即试验次数。当  $n > 11$  时, 本文将沿用王、方在[11]中提出的以矩形均匀设计表  $U_n(n^s)$  为基础, 通过变换而获得混料均匀设计表的方法, 即变换法, 这将在第2节中讨论; 当  $4 \leq n \leq 11$  时, 变换法产生的混料均匀设计表的均匀性较差, 本文提出一种迭代法来改进它的均匀性, 从而获得较均匀的混料均匀设计表, 这将在第3节中讨论。在第4节中, 本文将简要介绍循环拉丁方型方法。

## § 2. 变 换 法

王、方在[11]中提出了基于矩形均匀设计表获得混料均匀设计表的方法——变换法。其基

\* 国家自然科学基金委员会重点基金支持的课题。

本文1990年10月4日收到, 1991年10月31日收到修改稿。

本思想数论方法的味道较浓。本节着重从随机向量函数的分布理论的角度出发，导出完全一致的变换公式。

随机向量  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)'$  在区域  $D \subset R^s$  上均匀分布，记成  $\underline{X} \sim U(D)$ ， $\underline{X}$  的取值记成  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)' \in D$ ，其密度函数为

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = 1/V(D) \quad (2.1)$$

其中  $V(D)$  表示区域  $D$  的容积。

为了叙述变换法，我们先给出以下定理。

**定理 2.1** 如果随机向量  $\underline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{s-1})' \sim U([0, 1]^{s-1})$ ，变换  $\underline{x} = G(\underline{u})$ ，其中  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)'$ ， $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1})'$ ，且

$$G: \begin{cases} x_i = \prod_{j=1}^{i-1} u_j^{1/s-j} (1 - u_i^{1/s-i}), & i=1, 2, \dots, s-1 \\ x_s = \prod_{j=1}^{s-1} u_j^{1/s-j}. \end{cases} \quad (2.2)$$

则  $\underline{X} = G(\underline{U}) \sim U(T_s)$ 。

证明 易求得变换  $G$  的雅可比为

$$J(G) = \sqrt{s} / (s-1)!,$$

故由随机向量函数的分布理论，得

$$1 = f_{\underline{U}}(\underline{u}) = f_{\underline{X}}(\underline{x}) |J(G)|.$$

于是

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = (s-1)! / \sqrt{s} = 1/V(T_s).$$

即

$$\underline{X} \sim U(T_s).$$

由定理 2.1，可知，如果  $n$  个点

$$\underline{u}_k = (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k(s-1)})', \quad k=1, 2, \dots, n$$

在  $[0, 1]^{s-1}$  上均匀散布，这时这  $n$  个点可看成  $[0, 1]^{s-1}$  上某均匀分布随机向量的一个特殊抽样，因而由

$$\begin{cases} x_{ki} = \prod_{j=1}^{i-1} u_{kj}^{1/s-j} (1 - u_{ki}^{1/s-i}), & i=1, 2, \dots, s-1 \\ x_{ks} = \prod_{j=1}^{s-1} u_{kj}^{1/s-j} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$k=1, 2, \dots, n$$

得到的  $n$  个点

$$\underline{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{ks})', \quad k=1, 2, \dots, n$$

在  $T_s$  上均匀散布。类于矩形均匀设计表，称

$$SU_{n \times s} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \underline{x}'_1 \\ x'_2 \\ \underline{x}'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ \underline{x}'_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

为混料均匀设计表。

我们知道，由 [1] 获得的矩形均匀设计表  $U_n(n^s)$  中的试验点在试验区域  $[1, n]^s$  上均匀散布。当  $n$  为奇数时，令

$$U_{n \times s}(a) = (a_{kj})_{n \times s} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{cases} a_{kj} \equiv ka^{j-1} \pmod{n}, & j=1, 2, \dots, s; k=1, 2, \dots, n-1 \\ a_{nj} = n, & j=1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (2.6)$$

当  $n$  为偶数时, 划去  $U_{(n+1) \times s}(a)$  中最后一行即得到  $U_{n \times s}(a)$ . [1] 中表 4.1 和 4.2 给出了  $5 \leq n \leq 31$ ,  $2 \leq s \leq n+1/2$  时相应于  $n, s$  的  $a$ , 可供查用. 因  $a$  由  $n, s$  决定, 故可将  $U_{n \times s}(a)$  简记成  $U_{n \times s}$ . 令

$$V_{n \times s} = (U_{n \times s} - 1) / (n - 1) = \left( \frac{a_{kj} - 1}{n - 1} \right)_{n \times s} = (v_{kj})_{n \times s} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

则易证  $v_1, v_2, \dots, v_n$  在  $[0, 1]^s$  上均匀散布. 在 [10] 中, 方开泰教授建议采用

$$F_{n \times s} = (2U_{n \times s} - 1) / 2n = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

代替 (2.7) 中的  $V_{n \times s}$ . 从统计意义上来说,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  并不严格在  $[0, 1]^s$  上均匀散布. 但从直观上或 MSE 意义上 (MSE 的定义将在下节给出),  $v_1, v_2, \dots, v_n$  确实比  $v_1, v_2, \dots, v_n$  在  $[0, 1]^s$  上散布得更均匀. 本文的全部结果以 (2.8) 为基础, 综上所述, 可得变换法如下:

- ① 给定  $n, s$  查 [1] 中表 4.1 或 4.2 得到  $a$ .
- ② 利用 (2.5)、(2.6) 计算  $U_{n \times s}(a)$  即  $U_{n \times s}$ .
- ③ 利用 (2.8) 计算  $F_{n \times s}$ , 令  $F_{n \times s} = (f_{kj})_{n \times s}$ .
- ④ 利用 (2.3)、(2.4) 计算  $SU_{n \times (s+1)}$ , 其中的  $u_{kj}$  用  $f_{kj}$  代替, 即得  $SU_{n \times (s+1)}$  (见 (2.4)).

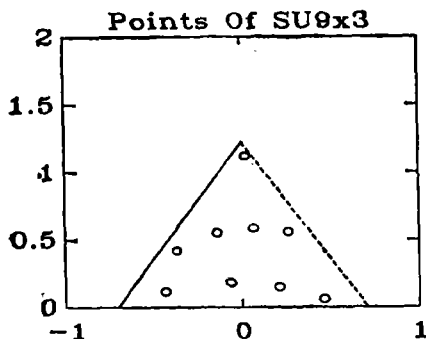


Fig. 2.1

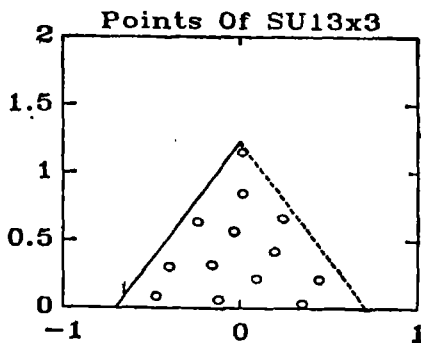


Fig. 2.2

图 2.1 和 2.2 分别给出了  $SU_{9 \times 3}$  和  $SU_{13 \times 3}$  的试验点在  $T_s$  上的散布情况. 利用计算机绘图, 可以看到当  $n \geq 13$  时,  $SU_{n \times (s+1)}$  中的点散布得很均匀,  $n < 11$  时均匀性较差.

### § 3. 迭 代 法

上节谈到,  $4 \leq n \leq 11$  时,  $SU_{n \times n}$  的试验点在  $T$  上散布得不是很均匀, 有待进一步均匀化.

衡量点集均匀性的指标除了点集的 Discrepancy (cf. [10]) 外, 还有一个常用指标——点集的 MSE (Mean Square Error). 一般而言, MSE 越小, 相应的点集在区域中散布就越均匀. 点集  $\{q_i\}_{i=1}^n$  在区域  $D$  上的 MSE 定义为

$$\text{MSE}(\{q_i\}_{i=1}^n, D) = \frac{1}{V(D)} \int_D \min_{1 \leq i \leq n} \|x - q_i\|^2 dx \quad (3.1)$$

其中  $V(D)$  是区域  $D$  的容积,  $\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^s (x_i - y_i)^2$ .

令

$$D_i = \{x \in D \mid \|x - q_i\| \leq \|x - q_j\|, \quad j=1, 2, \dots, n\} \quad (3.2)$$

$i=1, 2, \dots, n$

则

$$\text{MSE}(\{q_i\}_{i=1}^n, D) = \sum_{i=1}^n \frac{V(D_i)}{V(D)} \text{MSE}(q_i, D_i). \quad (3.3)$$

**引理 3.1** 设  $\underline{X} \sim U(D)$ ,  $E\underline{X} = \underline{\mu}$ , 则

$$\text{MSE}(\underline{\mu}, D) = \min_{q \in D} \text{MSE}(q, D) \quad (3.4)$$

由此得

**定理 3.1** 设  $\{D_i\}_{i=1}^n$  是  $D$  的一个分割, 而

$$\begin{cases} D_i \cap D_j = \phi, & i \neq j, \quad i, j=1, 2, \dots, n \\ \bigcup_{i=1}^n D_i = D \end{cases} \quad (3.5)$$

而  $\underline{X}_i \sim U(D_i)$ ,  $\mu_i = E\underline{X}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 即

$$\text{MSE}(\{\mu_i\}_{i=1}^n, D) = \min_{\substack{q_i \in D_i \\ i=1, 2, \dots, n}} \text{MSE}(\{q_i\}_{i=1}^n, D). \quad (3.6)$$

(3.2) 的划分近似满足条件 (3.5), 因此, 我们可用定理 3.1 和点集  $\{q_i\}_{i=1}^n$  获得均匀性比  $\{q_i\}_{i=1}^n$  好得多的点集  $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ .

获得均匀性比点集  $\{q_i\}_{i=1}^n$  好得多的点集  $\{\mu_i\}_{i=1}^n$  的关键问题是如何求得  $\mu_i = E\underline{X}_i$ ,  $\underline{X}_i \sim U(D_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 从 (3.2) 可以看出,  $D_i$  是极其不规则的. 显然, 可用 Monte Carlo 方法. 为了提高效率和精度, 本文采用准 Monte Carlo 方法, 即数论方法. 设在  $D$  中用数论方法均匀散布  $N$  个点  $\{x_i\}_{i=1}^N$  (cf. [11]), 则按 (3.2) 计算落入  $D_i$  的点, 记成  $x_{ij}$ ,  $j=1, 2, \dots, N_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n N_i = N$ . 然后取

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij} = \bar{x}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

代替  $\mu_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 由定理 3.1, 只要  $N$  充分大, 就有

$$\text{MSE}(\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n, D) \leq \text{MSE}(\{q_i\}_{i=1}^n, D) \quad (3.8)$$

即  $\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n$  在  $D$  上的均匀性不劣于  $\{q_i\}_{i=1}^n$ . 令

$$\Delta = 1 - \text{MSE}(\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n, D) / \text{MSE}(\{q_i\}_{i=1}^n, D) \quad (3.9)$$

则

$$\Delta < 1.$$

综上所述,可形成如下的迭代算法:

① 给定  $\delta > 0$  (如取  $\delta = 0.01$  或  $\delta = 0.001$ ) 和  $D$  中的点集  $\{q_i\}_{i=1}^n$ .

② 由  $\{q_i\}_{i=1}^n$  按 (3.2) 产生  $D$  的一个分割  $\{D_i\}_{i=1}^n$ , 在  $D$  中用数论方法均匀散布  $N$  个点  $\{x_{ij}\}_{i=1}^n$ , 并按 (3.2) 计算落入  $D_i$  的点  $x_{ij}$ ,  $j=1, 2, \dots, N_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n N_i = N$ .

③ 用 (3.7) 计算  $\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n$ , 用 (3.9) 计算  $\Delta$ .

④ 以  $\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n$  代替  $\{q_i\}_{i=1}^n$  返回 ② 直至  $\Delta < \delta$  为止.

顺便指出,上述算法与聚类分析中的  $k$ -means 方法十分类似. 文献 [9] 指出,  $k$ -means 方法是收敛的, 从而本算法也是收敛的.

在上述算法中,  $\{q_i\}_{i=1}^n$  的均匀性极其重要. 令  $D = T_s$ , 设  $\{x_i\}_{i=1}^n$  在  $T_s$  上均匀散布, 取 § 2 中所得的  $SU_{n \times s}$  的  $n$  个点作为  $\{q_i\}_{i=1}^n$ , 则按上述算法, 可以得到  $T_s$  中均匀性好得多的点集  $\{\hat{\mu}_i\}_{i=1}^n$ . 图 3.1 是以  $SU_{9 \times 3}$  中的点作为初始点集, 利用上述算法经 4 次迭代后获得的点集在  $T_3$  上的散布情况. 记新点集为  $A-SU_{n \times s}$ ,  $T_s$  上的 scheffé 网格点集记成  $L-SU_{n \times s}$ . 与图 2.1 相比, 可见图 3.1 中的  $A-SU_{9 \times 3}$  在  $T_3$  上的散布比  $SU_{9 \times 3}$  要均匀得多, 布局也合理得多, 从 MSE 角度来看,  $MSE(SU_{9 \times 3}, T_3) = 0.0227$ , 而  $MSE(A-SU_{9 \times 3}, T_3) = 0.0172$ , 后者要小得多. 图 3.2 是  $A-SU_{6 \times 3}$  中的点在  $T_3$  上的散布情况.

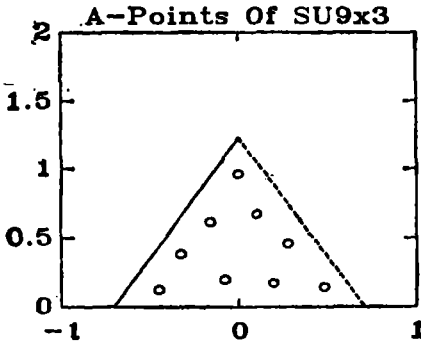


Fig.3.1

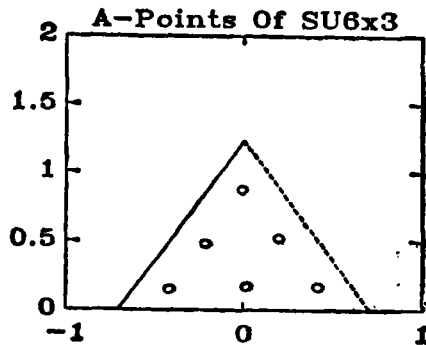


Fig.3.2

当  $n = \sum_{k=1}^m k$ ,  $s=3$  时, 如  $n=1, 3, 6, 10, 15$  等, 点集  $A-SU_{n \times 3}$  在  $T_3$  上散布情况非常类似于 Scheffé 的单纯形网格设计 (cf. [5]), 所不同的是  $A-SU_{n \times 3}$  较 Scheffé 网格点内移了一小段距离, 以使 MSE 更小. 图 3.3 是 Scheffé 的单纯形网格设计当  $n=10$  时网格点在  $T_3$  上的散布情况, 而图 3.4 是  $A-SU_{10 \times 3}$  中的点在  $T_3$  上的散布情形, 可见其异同.

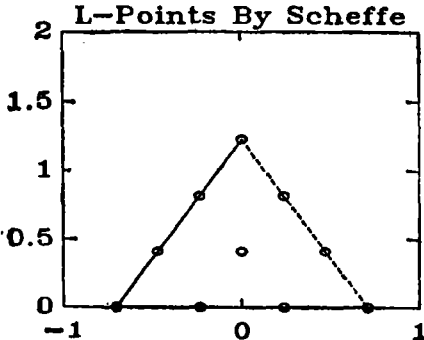


Fig.3.3

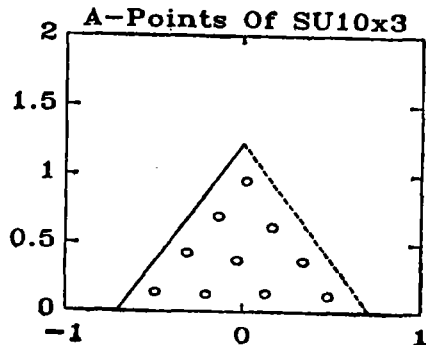


Fig.3.4

有一点值得一提,  $A-SU_{n \times s}$  形成的点集在  $T_s$  上较  $SU_{n \times s}$  均匀, 是牺牲了某些因素的水平换来的. 如  $A-SU_{10 \times 3}$  每因素的水平数是 4, 而非  $SU_{10 \times 3}$  中的水平数 10, 这一点可从图 3.4 看出. 因此, 如要保证每因素的水平数, 就不要片面追求试验点集在试验区域中的均匀性.

在附录, 我们给出了  $4 < n < 11$ ,  $2 < s < \frac{n+1}{2}$  时  $A-SU_{n \times s}$  表, 仍记成  $SU_{n \times s}$  的形式, 可供实际工作者参考.

## § 4. 循环拉丁方型方法

利用前两节所讨论的方法, 可获得混料均匀设计表  $SU_{n \times (s+1)}$  或  $A-SU_{n \times (s+1)}$ , 但其中的  $s$  必须满足

$$2 < s < \frac{n+1}{2} \quad (4.1)$$

当

$$\frac{n+1}{2} < s < n-1 \quad (4.2)$$

时, 找不到相应的混料均匀设计表, 其原因是所用方法的基础——矩形均匀设计表  $U_{n \times s}$  中的  $s$  必须满足条件(4.1). 张在[17]中给出了满足条件(4.2)的不完全拉丁方型矩形均匀设计表  $HOL_{n \times s}$ , 因而利用前两节的方法, 我们可以给出满足条件(4.2)的混料均匀设计表. 当  $s=n$  时, 利用循环拉丁方型均匀设计表获得混料均匀设计表, 方法十分简单, 这里略作介绍.

称

$$OL_n(q_n) = OL_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

为以  $q_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$  为设计参数的  $n$  阶循环拉丁方, 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个全排列. 当  $q_n^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)'$  使得  $OL_n(q_n)$  形成的试验点集(每一行元素对应一个试验点, 每一列元素对应每一因素的各水平数)在试验区域

$$D_n = \left\{ x_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \mid \sum_{i=1}^n x_i = n(n+1)/2, x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n \right\} \quad (4.4)$$

上散布最均匀时, 就称  $OL_n(q_n^*)$  为  $n$  阶循环拉丁方型均匀设计表, 记作  $HOL_n(q_n^*)$ , 其中  $q_n^*$  为最优设计参数, 当均匀度准则一定时,  $q_n^*$  由  $n$  唯一决定, 因而可简记成  $HOL_n$ . 在[15]中, 蒋、陈给出了  $3 < n < 8$  的  $q_n^*$ ; 在[16]中, 陈给出了  $q_n^*$ ; 在[17]中, 张给出了  $10 < n < 20$  的  $q_n^*$  的近似值. 我们把这些  $q_n^*$  列成表 4.1, 供查用.

注意到(4.4)中的  $D_n$  实际上是一个单纯形, 令

$$SHOL_n = SHOL_n(q_n^*) = HOL_n(q_n^*) / n \frac{(n+1)}{2} \quad (4.5)$$

则其相应的试验区域为单纯形

表 4.1  $HCL_n$  的最优设计参数

$n$	$\xi$
3	[1, 2, 3]
4	[1, 2, 4, 3]
5	[1, 2, 4, 3, 5]
6	[1, 2, 4, 5, 3, 6]
7	[1, 2, 7, 3, 5, 6, 4]
8	[1, 2, 5, 4, 7, 3, 8, 6]
9	[1, 2, 4, 8, 3, 6, 7, 5, 9]
10	[1, 2, 4, 8, 3, 10, 5, 6, 9, 7]
11	[1, 11, 10, 3, 2, 8, 4, 9, 5, 7, 6]
12	[1, 12, 11, 3, 7, 8, 4, 9, 5, 10, 6, 2]
13	[1, 3, 12, 13, 10, 5, 9, 6, 4, 7, 2, 11, 8]
14	[1, 11, 3, 2, 13, 13, 9, 6, 4, 8, 7, 14, 5, 10]
15	[1, 11, 7, 8, 9, 6, 2, 15, 14, 10, 3, 13, 5, 12, 4]
16	[1, 2, 6, 13, 3, 15, 10, 12, 14, 4, 9, 8, 7, 11, 5, 16]
17	[1, 13, 8, 15, 5, 9, 7, 3, 12, 10, 11, 6, 14, 4, 17, 16, 2]
18	[1, 6, 5, 18, 2, 13, 8, 11, 9, 3, 10, 14, 4, 7, 15, 12, 17, 16]
19	[1, 19, 18, 2, 10, 8, 15, 16, 4, 3, 7, 14, 6, 13, 9, 11, 5, 12, 17]
20	[1, 10, 2, 13, 15, 7, 5, 3, 16, 11, 14, 8, 12, 6, 9, 19, 18, 4, 17, 20]

$$T_n = \left\{ x_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (4.6)$$

故  $SHCL_n$  是  $T_n$  上的混料均匀设计表。

利用表 4.1 中的  $g_n^*$  和 (4.3)、(4.5), 我们可以获得  $3 \leq n \leq 20$  的混料均匀设计表  $SHCL_n$ 。这些设计表的最大特点是因素个数、每因素的水平数和试验次数三者相等。

本文得到方开泰教授热情指导, 在此表示衷心的感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 方开泰, 均匀设计, 应用数学学报, 1980, 3, 363—372.
- [2] 方开泰, 均匀设计, 中国科学院应用数学所印, 1984.
- [3] Wang, Y. & Fang, K. T., A note on uniform distribution and experimental design, *Kezue Tongbao*, 1981, 26, 485—489.
- [4] 李季纶, 均匀设计在纺织工业中的应用, 纺织学报, 1983, No. 2.
- [5] 薛诗松, 丁元等, 回归分析及其试验设计, 华东师大出版社, 1981.
- [6] Scheffé, H., Experiments with mixtures, *J. Royal Stat. Soc.*, 1958, Ser. B, 20, 344—360.
- [7] Scheffé, H., The simplexcentroid design for experiments with mixtures, *J. Royal Stat. Soc.*, 1963, Ser. B, 25, 235—263.
- [8] Becker, N. O., Model and design for experiments with mixtures. *Australian Journal of Statistics*, 1978, 20, 195—208.
- [9] Cornell, J. A., Experiments with Mixtures, John Wiley & Sons, 1981.
- [10] 张尧庭, 方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 北京, 1982.
- [11] Hua, L. K. and Wang, Y., Applications of number theory to numerical analysis, Springle-Verley & Science Press, 1981.
- [12] Wang, Y. and Fang, K. T., Number theoretic method in applied Statistics (I) and (II), *Chin. Ann. of Math.*, 11B (1990), 51—65 and 76—86.
- [13] Fang, K. T. and Wang, Y., A sequential algorithm for optimization and its applications to regression analysis, Technical Report 002, Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, 1989.

- [13] 张金廷, 次序统计量矩的计算, 科大研究生院学报, 1990, V. 7, No. 1.  
[14] 方开泰, 张金廷, 非线性回归模型参数估计的一个新算法, 第四届全国数学地质会议交流资料, 1990 成都.  
[15] 蒋 声, 陈瑞琛, 拉丁方型均匀设计, 高校应用数学学报, 1987, V2, No. 4.  
[16] 陈瑞琛, 利用置换构造循环拉丁方型设计, 高校应用数学学报, 1989, V4, No. 4  
[17] 张金廷, 拉丁方型均匀设计, 硕士毕业论文, 1991.

## UNIFORM DESIGNS FOR EXPERIMENTS WITH MIXTURES (UDEM)

ZHANG JINTING

(*Institute of Applied Mathematics, Beijing, 100080*)

In this paper the transform method proposed by Wang and Fang in, [11] for obtaining the UDEM tables on the basis of the RUD (Rectangle Uniform Designs) tables is discussed in details. Furthermore, the iteration method for improving the uniformity of a UDEM table is discussed too. Finally, the so called OLST (Cyclic Latin Square Type) method is presented. In appendix the improved UDEM tables with the row number  $4 \leq n \leq 11$  are given.