应用概率统计 第五卷
第四期 1989年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 5. No. 4. Nov. 1989.

人体测量抽样方案目标量的估计及样本量的确定*

冯士雍 (中国科学院系统科学研究所)　孙山泽 (北京大学)　毕 健 (中国标准化综合研究所)

摘　　要

本文综述了与人体测量抽样方案有关的一些问题,提出了一种总体分位数估计量 $\hat{X}_p$ 的(相对)精度的定义,给出了构造 $\hat{X}_p$ 的方法,讨论了 $\hat{X}_p$ 的精度与样本量的关系以及为制定服装号型系列标准有关的一些问题.

§1. 引　　言

1985—1987年间,我们为国家标准局、中国服装工业总公司与中国人民解放军总后军需装备研究所等单位,设计了几个有关人的体型尺寸测量的抽样方案[1] [2] [3]. 在这些抽样调查方案中,所需估计的目标量均不是一般抽样调查项目中所遇到的,在许多文献中经过充分研究讨论的那些总体参数,例如总体总和、平均数、比例或两个总数之比值等. 例如在为制定服装号型系列标准为目的的抽样,人体某些尺寸的平均数,如平均身高、平均胸围或腰围就不具有特别重要的意义. 即使这些量的估计能精确到0.001 mm,与制定服装号型系列标准,使它能满足多数人的需要并无直接联系. 在这些问题中,我们更感兴趣的是给出人体的各种尺寸的分布情况,需要估计的目标量主要以这些尺寸的分位数 X_p 的形式出现.

为达到上述目的,考虑到我国人口分布的现状以及人体测量的特点,在制定抽样方案时我们对所考虑的总体进行必要的划分. 对每个子总体(例如成年男子,成年女子、少男、少女;将校级军官、尉级军官与士兵等)都采用分层整群抽样(但针对不同子总体的情况方案都不尽相同,例如对男士兵也采用了系统抽样). 我们对不同的调查方案,考虑了实际任务的需要,给出对分位数估计精度的提法,研究了精度与样本量之间的关系. 现将在制定这些方案时,对上述问题的各种考虑及解决方法综合报道如下.

§2. 层的划分及群的组成

采用分层整群抽样是由于人体测量工作本身的特点决定的. 制定一个效率高的人体测量抽样方案,必须考虑到影响人的体形尺寸各个方面的特点,诸如地域、年龄、职业等的影响,同

本文1988年5月25日收到.
* 国家自然科学基金7860013资助项目.

时考虑到测量工作的方便. 对此,我们作了以下的处理.

1) 按地域分层

中国疆土辽阔,人口众多,且传统地居住稳定,人员流动较少. 多种历史资料表明,中国人人体尺寸与地域的关系极为密切. 我们参考了有关资料,按人类学的观点将除台湾以外的全国各省、市、自治区分成六个自然区域. 在同一自然区域中,有的由于地理、气候、遗传等因素的影响,差别仍较大,因此在有些方案(例如[1])中,我们再进一步根据几种历史资料中各省成年人平均身高的资料,划分为高、中上、中下及矮四档. 因此最终全国各省、市、自治区被划分成 12 个层,如表 1 所示. 抽样时按工作方便,在层内选取一个或几个省、市、自治区进行测量. 而为了今后数据分析的方便,例如能采用样本分位数估计总体分位数等,在各层中采用按人口总数比例分配的方法.

表 1 中国人体型的地域划分

平均身高 \ 自然区域	I	II	III	IV	V	VI
矮				湖南 江西	广东 广西	四川 贵州
中下		甘肃 青海	浙江 安徽	湖北	福建	云南
中上		陕西,宁夏 山西,河南 西藏	江苏 上海			
高	黑龙江,吉林 辽宁,内蒙 河北,北京 天津,山东	新疆				

2) 群的组成

由于人体尺寸测量是件技术性较强的工作,同时测量的项目也较多,例如项目[1],多达 74 项. 为使工作方便,我们一般的在层内采用随机整群抽样. 在群的抽取过程中,特别要注意的是群内个体的年龄结构. 资料表明不同年龄段的人体型尺寸有明显的差异. 但考虑到实地测量的方便,不可能做到分年龄段调查测量,否则很难保证抽样的随机性. 因此抽样方案规定:整群样本应是一个自然的群体单位,如一个独立的实际单位,或一个单位中的一个或几个车间或班组. 人数恰好达到方案规定的群体大小(允许有几个人的误差). 避免在一个较大单位中人为挑选被测人员,或听任自流愿意测试的人才测,以凑够规定的群体大小. 这样做的目的是尽量使被测样本中各年龄段的结构与总体中相应结构基本一致. 必要时可通过适当选择样本群以调整样本中的年龄结构. 例如当中、老年人的被测人数不足时,可有意选择一些历史较长,老同志较多的单位,例如多抽一些办公室,科研单位等. 上面提到人体尺寸与地域的关系极为密切,这就涉及被测人员的藉贯问题,由于这个问题本身比较复杂,且因为我们测量主要不是从人类学或遗传学观点进行研究,因此我们对于被测人员的藉贯问题不予考虑(仅加以记录). 允许有非本省藉的人员、但有一种情况必须排除,即当某单位是从不属于本层的外

地迁移来时，则不能选作为样本群.

至于职业或工种对人体体形尺寸的影响，试调查时发现，从事不同职业人员的体形尺寸并无明显的差异. 因此我们的抽样方案只规定不抽测对体形尺寸有特殊要求的单位. 对不同行业与职业则不作区分.

3）关于群的大小

众所周知，整群抽样的设计效应 deff(design effect)为

$$\text{deff} \approx 1+(\overline{M}-1)\rho \tag{1}$$

其中 $\overline{M}$ 是平均群体大小，ρ 是群内相关系数. 关于后者，我们根据四川省试测数据计算得到的群间均方 s_b^2 与群内均方 s_w^2（均按通常的方差分析表计算）以及当时实测的平均群体大小 $\overline{M}$，由下式即可估计 ρ 值：

$$\hat{\rho}=\frac{s_b^2-s_w^2}{s_b^2+(\overline{M}-1)s_w^2} \tag{2}$$

试测时的 $\overline{M}=124$，计算结果为 $\hat{\rho}=0.00775$. 为提高效率，同时也为测量的方便，减少因测试人员疲劳引起测量误差的增大，我们取 $\overline{M}=80$，即一个测量组一天的工作量.

§3. 分位数估计量的相对精度及具体估计方法

1）总体分位数估计量精度的提法

前已指出，我们估计的目标量为总体的各种尺寸的分位数. 总体某个尺寸 x 的 p 分位数 $x_p(0<p<1)$ 即是满足下式的量

$$P\{x\leqslant x_p\}=p \tag{3}$$

应用中较重要的分位数有 $x_{.025}$，$x_{.05}$，$x_{.10}$，$x_{.20}$，$x_{.50}$，$x_{.80}$，$x_{.90}$，$x_{.95}$ 及 $x_{.975}$ 等，其中 $x_{.50}$ 即是中位数.

根据所测样本，可按一定方法对 x_p 进行估计记估计值为 $\hat{x}_p$. 对一般的估计量 $\hat{\theta}$，精度的提法有绝对精度与相对精度两种. 这两种精度都是在一定的概率意义以下，例如对于给定的置信度 95%，绝对精度 Δ 即是满足下式的量，

$$P\{|\hat{\theta}-\theta|\leqslant\Delta\}=0.95 \tag{4}$$

而通常的相对精度，即是指满足下式的 r：

$$P\left\{\frac{|\hat{\theta}-\theta|}{\theta}\leqslant r\right\}=0.95 \tag{5}$$

上两式中的 θ 都是被估计参数的真值. 按这两种定义不易确定精度与样本量的关系，而且也不一定满足我们的实际需要. 我们提出分位数估计量 $\hat{x}_p$ 的精度定义如下：对一个很小的数 d（例如 1%），使满足

$$P\{x_{p-d}\leqslant\hat{x}_p\leqslant x_{p+d}\}=0.95 \tag{6}$$

以下我们称 d 为 $\hat{x}_p$ 的（相对）精度. 请注意与(5)式中的 r 相区别.

2）x_p 的估计方法

按照(6)的定义，对于同一样本量，对不同的 p 值，分位数 $\hat{x}_p$ 所能达到的实际精度不同（详见下节中的讨论）. 此外，精度还因 x_p 的估计方法的不同而有差异. 由于人体体形尺寸近似遵从正态分布，因此在估计总体分位数时有两种方法可以采用. 一种是用样本分位数 $\tilde{x}_p$ 估计

x_p; 另一种是先从样本计算平均数 $\bar{x}$ 及样本标准差 s, 以

$$x'_p=\bar{x}+u_p s \tag{7}$$

估计 x_p, 其中 u_p 为标准正态分布 p 的分位数.

由于总体指标的实际分布与正态分布一般有一定差异, 特别是在分布的两端. 此外理论计算表明(详见下节), 对于较小的 p 值(例如 $p\leqslant 0.2$)或较大的 p 值(例如 $p\geqslant 0.8$), 以第一种估计方法精度较高, 而对中间的 p 值($0.2<p<0.8$), 以第二种估计方法精度较高. 因此我们采用 x_p 的估计量 $\hat{x}_p$ 为:

$$\hat{x}_p=\begin{cases}\bar{x}, & \text{当 } p=0.5;\\ \tilde{x}_p, & \text{当 } 0<p\leqslant 0.2 \text{ 或 } 0.8\leqslant p<1;\\ \omega(p)\tilde{x}_p+[1-\omega(p)]x_p^1, & \text{当 } 0.2<p<0.5 \text{ 或 } 0.5<p<1\end{cases} \tag{8}$$

其中 $\omega(p)$ 是适当选取的权, 可与 p 有关 $(0<\omega(p)<1)$. 当 p 值接近于 0.2 或 0.8 时, 取 $\omega(p)$ 接近于 1; 而当 p 接近于 0.5 时, 取 $\omega(p)$ 接近于 0.

§4. 精度与样本量的关系

1) 用 $\bar{x}$ 估计 $x_{.50}$ 时, 不同精度 d 所需简单随机样本的样本量

估计量的精度与样本量直接有关. 精度要求愈高, 所需的样本量就愈大. 此外, 对精度的不同提法, 计算样本量的方法也不尽相同. 这里我们针对 §3 中提出的精度定义, 先导出当用 $\bar{x}$ 估计 $x_{.50}$ 时, 简单随机抽样的样本量 n 与给定精度 d 之间的关系.

设 x 的分布遵从 $N(\mu,\ \sigma^2)$, $x_{0.5}=\mu$, $\bar{x}\sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$. 故

$$p\left\{x_{.50}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant\tilde{x}_{.50}\leqslant x_{.50}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95 \tag{9}$$

根据(6)式对 d 的定义, n 应满足

$$x_{.50}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=x_{.50-d}$$

及

$$x_{.50}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=x_{.50+d}$$

鉴于正态分布的对称性, 对于给定的 d 值, 上两式确定的 n 相等, 即为

$$n=\left[\frac{1.96}{\dfrac{x_{.50+d}-x_{.50}}{d}}\right]^2=\left[\frac{1.96}{u_{.50+d}}\right]^2 \tag{10}$$

例如给定 $d=1\%$ 时, $n=\left(\dfrac{1.96}{0.02507}\right)^2\doteq 6113$. 对于不同的 d 值, 所需的 n 值如表 2 所示.

表 2 用 $\bar{x}$ 估计 $x_{.50}$ 时, 不同的精度所需的简单随机抽样的样本量

$d(\%)$	0.5	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
n	24457	6113	5052	4245	3617	3118	2716	2387	2114	1886

2) 用 $\tilde{x}_p$ 估计 x_p 时, 不同 p 值实际达到的精度

当用简单随机样本的分位数 $\tilde{x}_p$ 估计 x_p 时, 众所周知, $\tilde{x}_p$ 的渐近分布为

$$N\left(x_p,\ \frac{\sigma^2 p(1-p)}{n\varphi^2(u_p)}\right) \tag{11}$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 是标准正态分布的密度函数．下面我们推导对于给定的 n 与 p，当用 $\tilde{x}_p$ 估计 x_p 时，实际能达到的精度 d^*．

由(11)式，当 n 大时，对于 95% 的置信度，

$$x_p+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(u_p)}=x_{p+d^*}$$

$$\frac{x_{p+d^*}-x_p}{\sigma}=\frac{1.96}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(u_p)}$$

从而

$$u_{p+d^*}=u_p+\frac{1.96}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(u_p)} \tag{12}$$

或根据(10)式有

$$u_{p+d^*}=u_p+u_{.50+d}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(u_p)} \tag{13}$$

由此对给定的 d(或 n)以及 p，可计算 d^* 值．当 d 分别为 1% 与 1.5% 时，对不同的 p 值，d^* 值如表 3 所示．

表 3 当 $d=1\%$ 与 $d=1.5\%$ 时不同 p 值 $\tilde{x}_p$ 实际达到的精度 d^*(单位 %)

$p(\%)$	1 (99)	2.5 (97.5)	5 (95)	10 (90)	20 (80)	30 (70)	40 (60)	50
$d=1\%$ 时的 d^*	0.223	0.366	0.523	0.731	0.988	1.139	1.235	1.253
$d=1.5\%$ 时的 d^*	0.317	0.532	0.767	1.082	1.470	1.701	1.831	1.880

在[4]中我们曾列出对不同的 p 值 $k=d^*/d$ 的近似值，实际上，这个值对不同的 d 值并不等于常数，但此值变化很小．例如根据表 3，我们有 $d^*/d(d=1\%,\ 1.5\%)$ 值如表 4．

表 4 当 $d=1\%$ 及 1.5% 时的 d^*/d 值

$p(\%)$	1 (99)	2.5 (97.5)	5 (95)	10 (90)	20 (80)	30 (70)	40 (60)	50
$d^*/0.01$	0.2228	0.3661	0.5228	0.7314	0.9875	1.1387	1.2350	1.2533
$d^*/0.015$	0.2115	0.3544	0.5116	0.7215	0.9800	1.1337	1.2204	1.2531

再如对 $p=0.50$，及不同的 d，$k=d^*/d$ 的值如表 5．

表 5 $p=0.5$ 时 $k=d^*/d$ 的值

$d(\%)$	1	1.5	3	5	10
d^*/d	1.2533	1.2531	1.2530	1.2514	1.2456

考虑到实际使用，可以将 $k=d^*/d$ 近似当作为仅是 p 的函数．由表 3 知，当取 $d=1\%$ 时，当用 $\hat{x}_{.05}=\tilde{x}_{.0.5}$ 估计 $x_{.05}$ 时，实际达到的精度为 0.523%，也即

$$P\{x_{.04497}<\hat{x}_{.05}<x_{.05523}\}=95\%$$

由此可见，当我们用(10)式确定简单随机样本量，用(8)式估计 x_p 时，对 $p=0.5$，$p\leqslant0.2$ 及 $p\geqslant0.8$，$\hat{x}_p$ 的实际精度均在 d 之内；而对 $0.2<p<0.5$ 或 $0.5<p<0.8$，只要适当选取权 $\omega(p)$，$\tilde{x}_p$ 的精度也接近于 d 的水平．

3) 整群抽样的样本量

由(10)式确定的样本量 n 仅适用于简单随机抽样或按比例分配的分层随机抽样，对于整

群随机抽样，根据(1)式，样本量 n' 应为

$$n' = n \cdot \mathrm{deff} = n[1+(\overline{M}-1)\rho]. \tag{14}$$

例如当要求 $d=1\%$, $\overline{M}=80$, $\rho=0.00775$ 时，

$$n' = 6113 \times [1+(80-1)\times 0.00775] \approx 9856$$

在实际问题中，考虑到测试记录可能出现的错误以及其它原因在数据处理时可能剔除一部分数据，因此我们通常在(14)式的基础上增加 10% 左右的余量．例如在[1]中，方案规定对成年男子及女子两个子总体，分别测量 11000 人．

§5．方案所能达到的绝对精度

上节我们给出了相对精度 d 与样本量 n 或 n' 的关系．本节讨论对于一个已制定的抽样方案(即 d 及 n 或(n')已给定)，$\hat{x}_p$ 所能达到的绝对精度 Δ.

根据(4)式，$\hat{x}_p$ 的绝对精度 Δ 满足(在置信度为 0.95 下)：

$$P\{|\hat{x}_p - x_p| \leqslant \Delta\} = 0.95 \tag{15}$$

Δ 的实际值不仅与 n 有关，而且与 x 的标准差 σ 有关，当然也与 $\hat{x}_p$ 的估计方法有关．对于中位数 $x_{0.5}=\mu$，我们是用 $\tilde{x}$ 来估计，此时

$$\Delta = 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{16}$$

若用样本分位数 $\tilde{x}_p$ 估计 x_p，则 Δ 的计算公式为(当 n 大时)

$$\Delta = \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(u_p)} \tag{17}$$

(16)(17)两式中的 σ，一般用历史资料或试调查资料所获得的估计量代替．

下面我们以某省女性总体为例，给出几个体形尺寸指标的绝对精度．该方案的相对精度 $d=1.5\%$，按简单随机抽样的样本量根据表 2 为 $n=2716$．表 6 给出了体高，胸围、及腰围的中位数 $x_{.50}$, $x_{.20}$(或 $x_{.80}$), $x_{0.05}$(或 $x_{0.95}$)的估计量所能达到的绝对精度．

表 6　某省女性总体抽样方案体高、胸围及腰围分位数估计的绝对精度 Δ

测量指标 x	总体标准差 σ	$\hat{x}_{0.5}$ 的 Δ	$\hat{x}_{0.2}$ 的 Δ	$\hat{x}_{0.05}$ 的 Δ
体高	4.97 cm	0.187 cm	0.267 cm	0.395 cm
胸围	4.90 cm	0.184 cm	0.263 cm	0.389 cm
腰围	6.13 cm	0.231 cm	0.329 cm	0.487 cm

从表 6 中的数值可看出，绝对精度也能满足实际需要，其他体形指标的标准差一般比这三个指标的标准差都要小，因此绝对精度更高．

§6．制定服装号型系列标准的一些特殊考虑

1) 制定服装号型系列标准的基本要求

项目[2]与[3]主要是为制定服装规格系列标准为主要目的的抽样方案．制定这类标准必须符合其实际需求．既要根据抽样实测的人体体形尺寸所作的统计分析(例如前面所述的分位数的估计)结果，还要结合服装剪裁及制作的实际经验来合理划分号型．一个成功的服装号

型系列应具备：号型划分合理，每个号型有一定批量，从而便于生产与销售；同时又要使全部号型能满足绝大多数消费者的需求．也就是说，要使绝大多数消费者能从这一系列的号型中，选出合体的服装．这就必须估计出划分服装号型的一些人体基本指标的置信区间，而且置信区间的上、下限的误差应在容许的范围内，即不应超过服装合体的尺度．根据 ISO3635—3637 等国际标准，衣服尺寸设计所依据的人体指标一般需三个设计尺寸，其它尺寸则可从与它们的相关关系推算．而我国实行的国标 GB1335—81 服装号型系列标准，仅考虑二个设计尺寸(例如上衣用身高及胸围；下装用身高及腰围，我们使用三项设计尺寸联合划分号型，要使全部号型应使绝大多数(我们规定为 90%)的人都可找到合体的服装．

2) 为制定合理服装号型系列标准所需抽测的最小样本量

为叙述方便，我们仍以上节中提到的某省女性总体为例，说明这个问题．女服规格系列主要可能采用的人体尺寸指标及其标准差(根据历史资料)及各尺寸指标的最大容许误差如表 7 所示．

表 7 女服主要尺寸指标和它们的标准差与容许误差(cm)

尺寸指标	标准差 σ	最大容许误差 Δ	σ/Δ
体高	4.97	1.0	4.97
胸围	4.90	1.5	3.27
腰围	6.13	1.0	6.13
臀围	5.23	1.5	3.49

从表 7 中 σ/Δ 值可看出，相对而言腰围的要求最高．因而考虑样本量(按简单随机抽样计算)时，主要考虑这一尺寸指标．

按三个尺寸指标联合划分服装号型需覆盖 90% 的人的要求，为使问题简化(比较保守的算法)，考虑立方体覆盖区域，且三个指标取同样的覆盖概率．则对每一单个指标要确定一个包含该指标 $\sqrt[3]{0.9}=96.55\%$ 的一个区间．这就需要估计出这个指标的 $(1-0.9655)/2=1.725\%$ 及 98.275% 两个分位数．它们估计量的绝对精度应在表 7 所列的容许误差范围之内．

另一方面，对确定的三维区域要求复盖 90% 这一论断也必须与相当的置信度相联系．我们仍取这个置信度为 95%，则以各指标独立考虑，对每一指标估计的置信度约为 98.3%．当以样本分位数 $\tilde{x}_p$ 估计 x_p 时，应有

$$P\{|\tilde{x}_p-x_p|\leqslant\Delta\}=0.983.$$

由此可得简单随机抽样的样本量

$$n=(u_{.983})^2\frac{p(1-p)}{\varphi^2(u_p)}\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2=(2.385)^2\frac{p(1-p)}{\varphi^2(u_p)}\left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2.$$

例如为使由样本估计的腰围 98.275% 分位数的误差不超过 1 cm，则由 (18) 式

$$n=(2.385)^2\frac{0.98275\times0.01725}{\varphi^2(u_{.98275})}(6.13)^2=1997$$

此外，在服装号型系列确定后，为按排生产，对划分的服装号型的每一档次，需提供该档次的消费者占全体消费者的比例的估计．这是一个百分率的估计问题，可按通常的方法对给定的绝对精度或相对精度来确定样本量．

参 考 文 献

[1] 毕健,孙山泽,冯士雍,中国成年人人体测量抽样方案(技术报告),1985.
[2] 孙山泽,冯士雍,吴国富,修订GB1335—81服装号型系列标准人体测量抽样方案,(技术报告),1987.
[3] 冯士雍,孙山泽,毕健,军人体型尺寸测量的抽样方案,(技术报告)1976.
[4] Sun Shanze, Feng Shiyong, Bi Jian, Sampling Plans for Human Body Measurements, Sino-American Statistical Meeting, Contributed Papers, 403—405, Beijing 1987.

THE ESTIMATION OF CHARACTERISTICS AND DETERMINATION OF SAMPLE SIZE IN SAMPLING PLANS FOR HUMAN BODY MEASURMENTS

FENG SHIYONG

(*Inst. of Systems Sci., Academia Sinica*)

SUN SHANZE

(*Beijing University*)

BI JIAN

(*Inst. of Comprehensive Standardization of China*)

This paper considers some aspects related to the sampling plans for human body measurements. In those plans, estimated values are given in the form of percentiles x_p of various human body measuments. A (relative) precision of $\hat{x}_p$ is defined; the relation of relative precision and sample size n is considered. In this way, the paper gives the methods of estima-ting x_p and determining n. Finally, the sample size for smaking standards of size designation of clothes is also considered.