点过程模型中向量参数极大似然估计的渐近性质*

房祥忠
(北京大学数学学院, 北京, 100871)

摘　要

点过程是一个应用广泛的统计模型. 在医学, 社会学, 经济学, 电子与通信科学以及软件与硬件可靠性等许多科学领域都能找到应用点过程的例子. 在这些实际应用中, 一般是根据问题的实际背景假定模型具有一定的参数形式, 然后根据观测数据给出未知参数的极大似然估计值以推断事物发展的客观规律. 我们知道, 一种估计量是否收敛以及收敛速度的快慢, 是决定这种估计量好坏的最为重要的标准. 本文对于一般的点过程模型中向量参数极大似然估计 (MLE) 首先给出了一个保证其强相合的较为广泛的充分性条件, 然后在进一步的条件下得到了重对数型的收敛速度.

关键词: 点过程, 参数估计, 渐进性质.
学科分类号: O212.

§1.　引　言

点过程是一个应用广泛的统计模型. 在医学, 社会学, 电子与通信科学, 经济学以及软件与硬件可靠性等许多领域都可以找到点过程应用的例子 (参见文献 [1]). 在许多的实际应用中, 都会根据问题的实际背景假定模型具有一定的参数形式, 然后根据观测数据给出未知参数的极大似然估计值. 我们知道, 一种估计量是否收敛以及收敛速度的快慢, 是决定这种估计量好坏的一种重要标准. 关于随机过程中参数MLE强相合性的研究已经有一些工作, 如Hutton等人 [3] 以及余耀棋 [4] 关于半鞅和鞅的工作, 以及孙万龙 [5] 关于指数多项式模型的工作. 在关于更一般模型的工作中, 所给出的收敛性条件比较强. [3] 要求"信息矩阵"有一个一致的收敛速度, [4] 要求参数空间是一个紧集, 且要求一些函数在整个参数空间上被控制住. 房祥忠 [6] 关于一类特殊的非齐次泊松过程模型给出了参数 MLE 的强收敛速度. 对于参数 MLE 的强收敛速度, 在一般的点过程模型中这类工作还没有见到.

本文对于一般的点过程模型中向量参数极大似然估计 (MLE) 首先给出了一个保证其强相合的较为广泛的充分性条件, 然后在进一步的条件下得到了重对数型的收敛速度.

本文的主要结果在 §2 中叙述, 证明被放在 §3 中. 另外, 这些结果是对于一维点过程叙述和证明的, 利用本文的方法容易将这些结果推广到多维点过程情形.

§2.　主要结果

设 $\{N(t),\ t\ge 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_\theta)$ 上关于 $\sigma-$代数流 $\{\mathcal{F}_t,\ t\ge 0\}$ 适应的一维计数过程, 且具有连续的强度函数 $\lambda(\theta,t)$, 这里 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)'\in\Theta$ 是未知向量参数, Θ 是 R^m 中的开集.

$[0,T]$ 表示观测时间区间, 观测值是 $\{N(t),\ 0\le t\le T\}$. 除非特别声明极限过程都是指 $T\to\infty$.

将以 $\theta^*=(\theta_1^*,\cdots,\theta_m^*)'\in\Theta$ 表示真实参数. $\|a\|$ 表示向量 a 的欧氏模, a' 表示向量 a 的转置. 规定 $\mathrm{LLg}(x)=\log\log(\max(x,e^2))$. P 和 E 分别表示参数为 θ^* 时的概率和数学期望符号 (即 $\mathsf{E}\xi=\mathsf{E}_{\theta^*}\xi$, $\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}_{\theta^*}(A)$). 记 m 维向量

$$\Phi(\theta,t)=(\phi_1(\theta,t),\cdots,\phi_m(\theta,t))'\triangleq\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log\lambda(\theta,t),\cdots,\frac{\partial}{\partial\theta_m}\log\lambda(\theta,t)\Big)',\tag{1}$$

*本项研究得到国家自然科学基金 (10071004) 和教育部博士点基金资助.
本文 1997 年 4 月 17 日收到, 2001 年 7 月 9 日收到修改稿.

$w_{ij}(\theta^*,t) \triangleq \int_0^T \phi_i(\theta^*,s)\phi_j(\theta^*,s)\lambda(\theta^*,s)\,ds$. 称 $W(\theta^*,t)=(w_{ij}(\theta^*,t))_{m\times m}$ 为信息矩阵．记 $\lambda_{\min}(T)$ 和 $\lambda_{\max}(T)$ 分别为矩阵 $W(\theta^*,T)$ 的最小和最大特征值．令

$$R(\theta^*,\theta,T)=\max_{1\le i,j\le m}|H_{ij}(\theta,T)-W_{ij}(\theta,T)+W_{ij}(\theta^*,T)|,$$

其中

$$H_{ij}(\theta,T)=\int_0^T \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log\lambda(\theta,t)\{dN(t)-\lambda(\theta,t)\,dt\}.$$

由 [9] 知基于观测值 $\{N(t),\ 0\le t\le T\}$ 的似然方程组为

$$G(\theta,T)\triangleq\int_0^T \Phi(\theta,t)\{dN(t)-\lambda(\theta,t)dt\}=0. \tag{2}$$

为了保证上面定义的量都存在, 需要如下的假设 (A1)(A2).

(A1) $\mathsf{E}(\int_0^T \lambda(\theta,t)\,dt)<\infty$, 对任意 $T<\infty$, $\theta\in\Theta$ 成立;

(A2) $\log\lambda(\theta,t)$ 关于 θ 二阶连续可微, 且 $\mathsf{E}\int_0^T \phi_i^2(\theta,t)\lambda(\theta,t)\,dt<\infty$ 对任意 $T<\infty$, $i=1,\cdots,m$, $\theta\in\Theta$ 成立．

两个主要结果是

定理 2.1 如果 (A1)(A2) 成立, 又存在 $\nu>1$, $\beta\in(0,1)$, 使下面两式成立,

$$(\log\lambda_{\max}(T))^{\nu}\overset{\text{a.s.}}{=}o(\lambda_{\min}(T)), \tag{3}$$

$$\sup_{\theta\in\mathcal{U}(\theta^*,\beta,T)}R(\theta^*,\theta,T)\overset{\text{a.s.}}{=}O(\lambda_{\min}(T)), \tag{4}$$

其中

$$\mathcal{U}(\theta^*,\beta,T)=\{\theta:\|\theta-\theta^*\|\le\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^{\beta}\},$$

则存在统计量 $\widehat{\theta}_T$ 当 T 充分大时它是似然方程组 (2) 的解, 且

$$\widehat{\theta}_T\overset{\text{a.s.}}{\to}\theta. \tag{5}$$

记 $h^2(t)=\sum_{i=1}^m h_i^2(t)$, 其中 $h_i^2(t)=w_{ii}(\theta^*,t)$, $i=1,\cdots,m$.

定理 2.2 如果满足 (A1)(A2), 并且存在 $\nu>1$, $\beta\in(0,1)$, 使得 (3) 和下面两式成立,

$$|\phi_i(\theta^*,T)|\sqrt{\mathrm{LLg}(h_i^2(T))/h_i^2(T)}\overset{\text{a.s.}}{\to}0, \tag{6}$$

$$\sup_{\theta\in\mathcal{U}(\theta^*,\beta,T)}R(\theta^*,\theta,T)\overset{\text{a.s.}}{=}o\big(\lambda_{\min}^{\beta}(T)\big(\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}\big)^{1-\beta}\big), \tag{7}$$

则

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\lambda_{\min}(T)\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\overset{\text{a.s.}}{\le}1. \tag{8}$$

又如果至少存在一个 i $(1\le i\le m)$ 和正值随机变量 c 使

$$\liminf_{T\to\infty}h_i^2(T)/h^2(T)\overset{\text{a.s.}}{=}c^{-2}>0,$$

则

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{c\lambda_{\max}(T)\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\overset{\text{a.s.}}{\ge}1. \tag{9}$$

值得指出的是, 可以给出一些更容易验证的局部条件保证 (4)(7) 成立, 这里从略．

例2.1 设$\{N(t),\ t\geq 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_\theta)$上的非齐次泊松过程, 强度函数为

$$\lambda(\theta,t)=\exp(\theta_0+\theta_1 t+\cdots+\theta_r t^r),$$

其中r是给定的非负整数, θ是未知的参数. 这个模型被称为指数多项式模型. 指数多项式模型是由[10] [11] [12]等根据实际问题逐步建立起来的. 美国军用标准(MLD-781)将此模型作为可靠性增长模型之一. 这是一个用途很广的点过程参数模型. 对给定的$T>0$, 研究根据观测值$\{N(t),\ 0\leq t\leq T\}$对θ的估计问题.

可以知道此模型不符合中[3][4]中收敛定理的条件. 但可以验证它满足定理2.1和定理2.2的条件. 应用定理2.2可以得到

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{(r!)^2}{(r\theta_r^*)^{2r}}\frac{1}{T^{2r^2+r}}\sqrt{\frac{\Lambda(\theta^*,T)}{\mathrm{LLg}(\Lambda(\theta^*,T))}}\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|\overset{\text{a.s.}}{\leq}1,$$

和

$$\limsup_{T\to\infty}\sqrt{\frac{\Lambda(\theta^*,T)}{\mathrm{LLg}(\Lambda(\theta^*,T))}}\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|\overset{\text{a.s.}}{\geq}1,$$

其中, $\Lambda(\theta,T)=\int_0^T\lambda(\theta,t)dt$, $\theta_r^*>0$.

例2.2 $\{N(t),\ t\geq 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}_\gamma)$上的自激点过程, 它的强度过程为

$$\lambda(\gamma,t)=\lambda(\gamma,t,N(t),\tau_1,\cdots,\tau_{N(t)})=\gamma_0+(\gamma_1-\gamma_0)(1+(-1)^{N(t)+1})/2,$$

其中$\gamma=(\gamma_0,\gamma_1)$, $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$是未知参数. 可以验证这个强度函数满足定理2.1和定理2.2的条件, 利用定理2.2可以得到

$$\limsup_{T\to\infty}\sqrt{\frac{B_0(T)}{2\mathrm{LLg}B_0(T)}}\|\widehat{\gamma}_T-\gamma^*\|\overset{\text{a.s.}}{\leq}{\gamma_1^*}^2\sqrt{1/{\gamma_0^*}^2+1/{\gamma_1^*}^2},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sqrt{\frac{B_0(T)}{2\mathrm{LLg}B_0(T)}}\|\widehat{\gamma}_T-\gamma^*\|\overset{\text{a.s.}}{\geq}\frac{{\gamma_0^*}^2}{\gamma_1^*},$$

其中$B_0(T)=\sum\limits_{i=1}^{N(T)}(1-(-1)^i)/2$.

§3. 主要结果的证明

引理3.1([13]) 设$(S_t,\ t\geq 0)$是m维局部平方可积鞅, 其可料变差过程矩阵$F_t=\langle S\rangle(t)$是正定的, 且

$$\lim_{T\to\infty}\lambda_{\max}(F_T)\overset{\text{a.s.}}{=}\infty,$$

则对任意的$\delta>1/2$,

$$F_T^{-1/2}S_T\overset{\text{a.s.}}{=}o\big((\log\lambda_{\max}(F_T))^\delta\big).$$

定理2.1的证明: 由泰勒公式知

$$G(\theta,T)=G(\theta^*,T)-W(\theta^*,T)(\theta-\theta^*)+\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\theta-\theta^*),\tag{10}$$

其中$\widetilde{\theta}$满足$\|\widetilde{\theta}-\theta^*\|\leq\|\theta-\theta^*\|$, 从而

$$\begin{aligned}&(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta,T)\\=&(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)-\|\theta-\theta^*\|^2\\&+(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\theta-\theta^*).\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
&|(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\theta-\theta^*)| \\
\leq&\|\theta-\theta^*\|\cdot\lambda_{\min}(T)\cdot R(\theta,\theta^*,T)\cdot\|\theta-\theta^*\| \\
\overset{\text{a.s.}}{=}&\|\theta-\theta^*\|^2 o(1),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta,T) \\
=&(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)-(1+o(1))\|\theta-\theta^*\|^2.
\end{aligned}
$$

当 $\|\theta-\theta^*\|=\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^\beta$ 时,

$$
\begin{aligned}
&(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta,T) \\
\overset{\text{a.s.}}{\leq}&\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^{1+\beta}-(1+o(1))\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^{2\beta} \\
\overset{\text{a.s.}}{=}&\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^{2\beta}\{\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^{1+\beta}-1-o(1)\}.
\end{aligned}
$$

利用引理3.1可以得到 $\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1)$, 从而对几乎所有样本当 T 充分大时 $(\theta-\theta^*)'W^{-1}(\theta^*,T)\cdot G(\theta,T)<0$, 于是由[14]中的思想知存在统计量 $\widehat{\theta}_T$, 对几乎处处的点, 当 T 充分大时有

$$
\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|<\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|^\beta
$$

且使 $G(\widehat{\theta}_T,T)=0$. 从而(5)成立. 证毕. □

引理3.2([15]) 设 $M_t,\ t\geq 0$是局部可积鞅, $k_t,\ t\geq 0$是可料过程, $k_t\to 0$ a.s., 使

$$
|\Delta M_t|\leq k_t\cdot\langle M\rangle_t^{1/2}/[2\mathrm{LLg}(\langle M\rangle_t)]^{1/2},
$$

则在 $\langle M\rangle_\infty\to\infty$ a.s.下,

$$
\limsup_{t\to\infty} M_t/[2\langle M\rangle_t\mathrm{LLg}(\langle M\rangle_t)]^{1/2}=1 \qquad \text{a.s.}.
$$

定理2.2的证明: 令

$$
G_i(\theta^*,T)=\int_0^T\phi_i(\theta^*,t)\{\mathrm{d}N(t)-\lambda(\theta^*,t)\mathrm{d}t\}.
$$

则 $G(\theta^*,T)=(G_1(\theta^*,T),\cdots,G_m(\theta^*,T))'$. 由条件(A1)(A2)可推知 $\{G_i(\theta^*,t),\ t\geq 0\}$ 为局部平方可积鞅, 且可以证明

$$
\langle G_i(\theta^*,\cdot)\rangle_t=h_i^2(T)=\int_0^T\phi_i^2\lambda(\theta^*,t)\mathrm{d}t.
$$

由于 $\lambda_{\min}(T)\overset{\text{a.s.}}{\to}\infty$, 从而 $h_i^2(T)\overset{\text{a.s.}}{\to}\infty\ (i=1,\cdots,m)$. 容易知道

$$
|\Delta G_i(\theta,T)|\leq|\phi_i(\theta^*,T)|.
$$

取

$$
k_t=|\phi_i(\theta^*,t)|\sqrt{\mathrm{LLg}(h_i^2(T))/h_i^2(T)}.
$$

由引理3.2及(6)

$$
\limsup_{T\to\infty}\frac{|G_i(\theta^*,T)|}{\sqrt{2h_i^2(T)\mathrm{LLg}(h_i^2(T))}}\overset{\text{a.s.}}{=}1. \tag{11}
$$

又

$$\frac{\|G(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}} \le \Big\{\sum_{i=1}^m \frac{h_i^2(T)}{h^2(T)}\Big(\frac{G_i(\theta^*,T)}{\sqrt{2h_i^2(T)\mathrm{LLg}(h_i^2(T))}}\Big)^2\Big\}^{1/2}.$$

所以

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\|G(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}} \overset{\text{a.s.}}{\le} 1. \tag{12}$$

由 (10) 可得

$$\begin{aligned}(\widehat{\theta}_T-\theta^*) =& W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\\ &+W^{-1}(\theta^*,T)\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\widehat{\theta}_T-\theta^*).\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\widetilde{\theta}$ 满足 $\|\widetilde{\theta}-\theta^*\|\le\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|$. 所以

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|\\ \le&\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|+\|W^{-1}(\theta^*,T)\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\widehat{\theta}_T-\theta^*)\|\\ \le&\lambda_{\min}^{-1}(T)\cdot\|G(\theta^*,T)\|+\lambda_{\min}^{-1}(T)\cdot R(\widetilde{\theta},\theta^*,T)\cdot\lambda_{\min}^{-\beta}(T)\cdot\|G(\theta^*,T)\|^{\beta},\\ &\frac{\lambda_{\min}(T)\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\\ \le&\frac{\|G(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}+\lambda_{\min}^{-\beta}\cdot R(\widetilde{\theta},\theta^*,T)\cdot\big(\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}\big)^{1-\beta}O(1).\end{aligned}$$

再由 (7)(12) 即可知 (8) 成立. 下面证明 (9) 成立.

由假设, 容易知道存在 i $(1\le i\le m)$, 使

$$\begin{aligned}&\limsup_{T\to\infty}\frac{\|G(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\\ &\ge\liminf_{T\to\infty}\frac{\sqrt{2h_i^2(T)\mathrm{LLg}(h_i^2(T))}}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\cdot\limsup_{T\to\infty}\frac{\|G_i(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h_i^2(T)\mathrm{LLg}(h_i^2(T))}}\\ &\overset{\text{a.s.}}{\ge}\frac{1}{c}.\end{aligned} \tag{14}$$

由 (13) 知

$$\begin{aligned}\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\| =&\|W^{-1}(\theta^*,T)G(\theta^*,T)\|\\ &-\|W^{-1}(\theta^*,T)\{H(\widetilde{\theta},T)-W(\widetilde{\theta},T)+W(\theta^*,T)\}(\theta-\theta^*)\|\\ \ge&\lambda_{\max}^{-1}(T)\|G(\theta^*,T)\|-\lambda_{\min}^{-1}(\theta^*,T)\cdot R(\widetilde{\theta},\theta^*,T)\cdot\lambda_{\min}^{-\beta}(\theta^*,T)\cdot\|G(\theta^*,T)\|^{\beta}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_{\max}(T)\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\\ \ge&\frac{\|G(\theta^*,T)\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}-\frac{\lambda_{\max}(T)}{\lambda_{\min}^{1+\beta}(T)}R(\widetilde{\theta},\theta^*,T)\big(\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}\big)^{1-\beta}.\end{aligned}$$

由 (3)(7)(14) 知

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{\lambda_{\max}(T)\|\widehat{\theta}_T-\theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}}\overset{\text{a.s.}}{\ge}\frac{1}{c}.$$

所以 (9) 成立. 定理证毕. □

致谢 本文是作者博士论文中的一部分，作者在此对导师陈家鼎教授表示衷心的感谢.

参考文献

[1] D.L. 斯奈德, 随机点过程 (中译本), 人民教育出版社, 1981.
[2] 陈家鼎, 生存分析与可靠性引论, 安徽教育出版社, 1993.
[3] J.H. Hutton and P.L. Nelson, Quasi-likelihood estimation for semimartingales, *Stoch. Processes Appl.*, **22**(1986), 245–257.
[4] 余耀棋, 随机过程极大似然估计的强相合性, 应用概率统计, **7**(1991), 33–40.
[5] 孙万龙, 非齐次 Poisson 过程情形下的最大似然估计, 数学进展, **19**(1990), 252–253.
[6] 房祥忠, Weibull 过程参数极大似然估计的重对数律, 应用概率统计, **10**(1994), 314–319.
[7] A. Svensson, Asymptotic estimation in the counting processes with parametric intensities based on one relization, *Scand. J. Statis.*, **17**(1990), 23–33.
[8] Y.A. Kutoyants, *Parameter Estimation for Stochastics Processes*, Heldermann Velay, Berlin, 1984.
[9] P. Bremaud, *Point Processes and Queues, Martingale Dynamies*, Springer, New York, 1981.
[10] D.R. Cox, *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuen, London, 1966.
[11] C.J. Maclean, Estimation and testing of exponential polynomial rate function within the nonstationary poisson process, *Bioetrika*, **61**(1974), 81–85.
[12] C.D. Mathers, Maximum likelihood estimation of exponential polynomial rate for poisson data, *Biom. J.*, **26**(1984), 33–38.
[13] Y.X. Lin, On the strong law of large numbers of multivariate martingales with random norming, *Stoch. Processes Appl.*, **54**(1994), 355–360.
[14] R.I. Jennrich, Asympotic properties of non-linear least squares estimators, *Ann. Math. Stat.*, **40**(1969), 633–643.
[15] 许逸, 关于局部平方可积鞅的重对数律, 应用概率统计, **6**(1990), 280–301.

Asympotic Properties of MLE of the Parameters for Point Processes

FANG XIANGZHONG

(*School of Mathematics Sciences, Peking University, Beijing, 100871*)

Suppose $\{N(t),\ t \geq 0\}$ is a point process on probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_\theta)$ with intensity $\lambda(\theta, t)$, where $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$ is unknown parameter. Let $\theta^* = (\theta_1^*, \cdots, \theta_m^*)'$ be the true value of θ. The observed data are $\{N(t),\ 0 \leq t \leq T\}$. Denote the MLE of θ as $\widehat{\theta}_T$. In this paper we give that, under some conditions, the MLE of θ is consistent, and

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\lambda_{\min}(T)\|\widehat{\theta}_T - \theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}} \overset{\text{a.s.}}{\leq} 1,$$
$$\limsup_{T\to\infty} \frac{c\lambda_{\max}(T)\|\widehat{\theta}_T - \theta^*\|}{\sqrt{2h^2(T)\mathrm{LLg}(h^2(T))}} \overset{\text{a.s.}}{\geq} 1,$$

where $c > 0$ and $h(T)$ are obtained from $\lambda(t, \theta^*)$, $\lambda_{\max}(T)$ ($\lambda_{\min}(T)$) is the maximum (minimum) among the eigenvalues of the information matrix.