应用概率统计 第十三卷
第三期 1997年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 13 No. 3 Aug. 1997

指数分布参数最佳仿射同变估计的可容许性*

孙 孝 前
(淮阴师范专科学校, 淮阴, 223001)

摘 要

本文在截尾样本情况下, 证明了双参数指数分布位置参数的最佳仿射同变估计是不容许的, 另外还得到了关于分位点最佳仿射同变估计的可容许性.

关键词: 容许性, 最佳仿射同变估计, 指数分布.
学科分类号: 211.5.

§1. 引 言

设随机变量 X 服从指数分布 $E(\mu,\sigma)$, 其密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}\exp\{-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty, 0<\sigma<+\infty, \mu,\sigma$ 均未知. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一组来自上述母体的容量为 $n(\geq 2)$ 的独立样本, $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(r)}$ 是以上独立样本产生的前 $r(\leq n)$ 个顺序统计量. 容易知道, 在此截尾样本下, (M,G) 是 (μ,σ) 的充分统计量, 其中 $M=X_{(1)}, G=(\sum\limits_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}-nX_{(1)})/r$.

设 A 是一个仿射变换群: $x\to ax+b$, 其中 a,b 是实数, $a>0$. 对于平方损失函数

$$L(\widehat{\theta},\theta)=\frac{1}{\sigma^2}(\widehat{\theta}-\theta)^2,$$

其中 $\widehat{\theta}$ 是待估参数 θ 的一个估计. 尺度参数 σ, 位置参数 μ 和分位点 $\lambda=\mu+\eta\sigma(\eta>0$ 是常数) 的最佳仿射同变估计分别为 $\widehat{\sigma}=G, \widehat{\mu}=M-G/n, \widehat{\lambda}=M+(\eta-1/n)G$. 对于这些估计是否可容许, 已有一些结果. 当 $r=n$ 亦即全样本之情形, 1973年Zidek [1], 1974年Brewster [2] 证明了 $\widehat{\sigma}$ 是不容许的, 1982年Rukhin & Strawderman [3], 1986年王静龙 [4] 先后独立地证明了 $\widehat{\mu}$ 及 $\widehat{\lambda}$(当 $0<\eta<1/n$ 或 $\eta>1+1/n$) 亦是不容许的. (其中 $\eta=1/n$ 或 $1+1/n$ 时的可容许性证明, [4] 中亦有.) 对于截尾样本情况, 叶慈南 [6] 证明了 $\widehat{\sigma}$ 亦是不容许的.

本文在截尾样本情况下证明了位置参数 μ 的最佳仿射同变估计 $\widehat{\mu}$ 是不容许的, 并给出了一个改进估计. 另外还证明了当 $0<\eta<1/n$ 或 $\eta>(1+r)/n$ 时, $\widehat{\lambda}$ 是不容许的; 当 $1/n\leq\eta\leq(1+r)/n$ 时, $\widehat{\lambda}$ 是容许的.

*国家自然科学基金资助项目.
本文1995年1月5日收到, 1996年9月6日收到第三次修改稿.

§2. $\widehat{\mu}$不容许性的证明

考察A的尺度变换子群$\phi: x \to ax, (a > 0)$, 在ϕ下, μ的同变估计具有形式: $G \cdot T(Y)$, 其中$Y = M/G$, 故有$\widehat{\mu} = G(Y - 1/n)$. 容易知道, M与G相互独立, 且分别服从$E(\mu, \sigma/n)$与$\Gamma(r-1, r/\sigma)$, 即有

$$p(m,g) = \begin{cases} \dfrac{nr^{r-1}}{\Gamma(r-1)\sigma^r} g^{r-2} \exp\{-\dfrac{n(m-\mu)+rg}{\sigma}\}, & \text{当} m \geq \mu, g \geq 0 \text{时}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

故经计算得(G, Y)的联合密度函数为

$$p(g,y) = \begin{cases} \dfrac{nr^{r-1}}{\Gamma(r-1)\sigma^r} g^{r-1} \exp\{-\dfrac{n(gy-\mu)+gr}{\sigma}\}, & \text{当} gy \geq \mu, g \geq 0 \text{时}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于尺度同变估计, 由于其风险仅依赖于μ/σ, 故在比较两个尺度同变估计的风险时, 可令$\sigma = 1$.

当$\mu < 0$时, 尺度同变估计$g \cdot T(y)$的风险为

$$\begin{aligned} R(G \cdot T(Y), \mu) = c\Big\{ & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [gT(y) - \mu]^2 g^{r-1} \exp\{-ng(y + \frac{r}{n})\} dg dy \\ & + \int_{-\infty}^{0} \int_0^{\mu/y} [gT(y) - \mu]^2 g^{r-1} \exp\{-ng(y + \frac{r}{n})\} dg dy \Big\}, \end{aligned}$$

其中$c = \dfrac{nr^{r-1}}{\Gamma(r-1)} \exp\{n\mu\}$. 当$y < -r/n$时, $\int_0^{\mu/y} (gt - \mu)^2 \exp\{-ng(y + r/n)\} dg$作为$t$的函数是二次函数, 其$t^2$项的系数大于零, 则

$$\psi(y, \mu) = \frac{\mu \int_0^{\mu/y} g^r \exp\{-ng(y + \frac{r}{n})\} dg}{\int_0^{\mu/y} g^{r+1} \exp\{-ng(y + \frac{r}{n})\} dg}$$

是它的最低点. 由于

$$\psi(y, \mu) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{[-(ny+r)]^k}{k!} \left(\dfrac{\mu}{y}\right)^{r+k+1} \dfrac{y}{r+k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{[-(ny+r)]^k}{k!} \left(\dfrac{\mu}{y}\right)^{r+k+1} \dfrac{1}{r+k+2}} > \frac{r+2}{r+1} y,$$

所以$(r+2)/(r+1) \cdot y$落在最低点的右边, 而在最低点的左边, 平方项系数大于零的二次函数是严格单调递减的, 故在$y < -r/n$时解不等式$y - \dfrac{1}{n} < \dfrac{r+2}{r+1} y$, 得$-(r+1)/n < y < -r/n$. 因此当$-(r+1)/n < y < -r/n$时, 有 $y - 1/n < (r+2)/(r+1) \cdot y$. 从而有如下结果:

定理2.1 $\widehat{\mu} = g(Y - 1/n)$在平方损失下作为$\mu$的估计是不容许的, 其一个改进估计为$\mu^* = GT^*(Y)$, 其中

$$T^*(Y) \doteq \begin{cases} \dfrac{r+2}{r+1} y, & \text{当} -\dfrac{r+1}{n} < y < -\dfrac{r}{n} \text{时}, \\ y - \dfrac{1}{n}, & \text{其它}. \end{cases}$$

§3. 关于$\widehat{\lambda}$是否可容许的问题

在尺度变换群ϕ下, λ的同变估计仍具有形式: $GT(Y)$, 且λ的最佳仿射同变估计$\widehat{\lambda} = G(Y - 1/n + \eta)$.

在$\mu \geq 0$时, $GT(Y)$的风险函数为

$$R(GT(Y),\mu) = c\int_0^{+\infty}\int_{\mu/y}^{+\infty}[gT(y)-\mu-\eta]^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dgdy;$$

在$\mu < 0$时, $GT(Y)$的风险函数为

$$R(GT(Y),\mu) = c\Big\{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[gT(y)-\mu-\eta]^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dgdy + \int_{-\infty}^{0}\int_0^{\mu/y}[gT(y)-\mu-\eta]^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dgdy\Big\}.$$

下面分四种情况讨论.

1^o. $\eta > (1+r)/n$.

在$\mu \geq 0$时, 考虑$y > 0$时关于t的二次函数$\int_{\mu/y}^{+\infty}(gt-\mu-\eta)^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dg$, 其中$t^2$项的系数大于零, 其最低点为

$$\psi_1(y,\mu) = \frac{(\mu+\eta)\int_{\mu/y}^{+\infty} g^r \exp\{-(ny+r)g\}dg}{\int_{\mu/y}^{+\infty} g^{r+1}\exp\{-(ny+r)g\}dg} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{r+1} a_k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{r+1} b_k s^k},$$

其中$s = (ny+r)\mu/y > 0, b_k = (r+1)!/k!, a_0 = \eta(ny+r)r!, a_k = (\eta(ny+r)r!)/k! + r!/(k-1)!\cdot y, k = 1,2,\cdots,r, a_{r+1} = y$. 经验证知当$\eta > (1+r)/n$时, $\psi_1(y,\mu) < [\eta(ny+r)+ry]/(r+1)$.

在$\mu < 0$时, 考虑$y > 0$时关于t的二次函数$\int_0^{+\infty}(gt-\mu-\eta)^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dg$, 其中$t^2$项的系数仍大于零, 其最低点为

$$\psi_2(y,\mu) = \frac{(\mu+\eta)\int_0^{+\infty} g^r\exp\{-(ny+r)g\}dg}{\int_0^{+\infty} g^{r+1}\exp\{-(ny+r)g\}dg} = \frac{(ny+r)(\mu+\eta)}{r+1} < \frac{\eta(ny+r)+ry}{r+1},$$

令$y - 1/n + \eta > [\eta(ny+r)+ry]/(r+1)$得$y < [\eta-(r+1)/n]/(\eta n - 1)$, 由二次函数的单调性质我们得到$\widehat{\lambda}$的一个改进估计 $\widehat{\lambda}^* = GT^*(Y)$, 其中

$$T^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\eta(ny+r)+ry}{r+1}, & \text{当} 0 < y < \dfrac{\eta-(r+1)/n}{\eta n - 1}\text{时},\\ y - \dfrac{1}{n} + \eta, & \text{其它}. \end{cases}$$

易知, $\widehat{\lambda}^*$比$\widehat{\lambda}$处处有较小的风险.

2^o. $0 < \eta < 1/n$.

在$\mu < 0, y < -r/n$时, 考虑关于t的二次函数 $\int_0^{\mu/y}(gt-\mu-\eta)^2 g^{r-1}\exp\{-(ny+r)g\}dg$, 其

中 t^2 项的系数大于零, 最低点为

$$\psi(y,\mu)=\frac{\int_0^{\mu/y}(\mu+\eta)g^r\exp\{-(ny+r)g\}dg}{\int_0^{\mu/y}g^{r+1}\exp\{-(ny+r)g\}dg}=\frac{-\dfrac{\eta(ny+r)}{r+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_ks^{k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_ks^{k+1}},$$

其中

$$a_k=\frac{y}{(k+r+1)k!}-\frac{\eta(ny+r)}{(k+r+2)(k+1)!},\quad b_k=\frac{1}{(k+r+2)k!},\qquad k=0,1,\cdots\cdots.$$

令 $p_k=a_k/b_k=(k+r+2)/(k+r+1)\cdot y-[\eta(ny+r)]/(k+1)$, 由于

$$p_k-p_{k+1}=\frac{1}{(k+r+1)(k+r+2)}\left[y+\frac{-\eta(ny+r)(k+r+1)(k+r+2)}{(k+1)(k+2)}\right],$$

而 $[(k+r+1)(k+r+2)]/[(k+1)(k+2)]$ 随着 k 的增加而严格减少, 故

i) $p_0=\min\{p_k\}$ 当且仅当 $p_0\le p_1$, 即

$$y+\frac{-\eta(ny+r)(r+1)(r+2)}{2}\le 0, \tag{1}$$

这时 $p_k-p_{k+1}\le 0, k=0,1,\cdots$, 从而 $p_0\le p_1\le p_2\le\cdots$.

ii) $p_i=\min\{p_k\}$ 当且仅当 $p_i-p_{i+1}\le 0, p_{i-1}-p_i\ge 0$, 即

$$y+\frac{-\eta(ny+r)(i+r+1)(i+r+2)}{(i+1)(i+2)}\le 0, \tag{2}$$

$$y+\frac{-\eta(ny+r)(i+r)(i+r+1)}{i(i+1)}\ge 0, \tag{3}$$

这时 $p_0\ge p_1\ge\cdots\ge p_{i-1}\ge p_i\le p_{i+1}\le p_{i+2}\le\cdots$. 若 $p_0=\min\{p_k\}$, 则 p_0 落在上述二次函数最低点的左边, 易知当 $0<\eta<1/[n(r+1)]$ 时, 只要 $-(1+r)/n<y<-r/n$, 就有 (1) 式及 $y-1/n+\eta<p_0=(r+2)/(r+1)\cdot y-\eta(ny+r)$ 同时成立, 故我们得到当 $0<\eta<1/[n(r+1)]$ 时, $\widehat{\lambda}=G(Y-1/n+\eta)$ 的改进估计 $GT_0(Y)$, 其中

$$T_0(y)=\begin{cases}\dfrac{r+2}{r+1}y-\eta(ny+r), & \text{当 } -\dfrac{r+1}{n}<y<-\dfrac{r}{n}\text{ 时},\\ y-\dfrac{r}{n}+\eta, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $i/[n(r+i)]<\eta<(i+1)/[n(r+i+1)]$ 时, 只要

$$-\frac{r+i+1}{n}<y<-\frac{r}{n}\left[1+\frac{i(i+1)}{\eta n(r+i)(r+i+1)-i(i+1)}\right],$$

便有 (2), (3) 及 $y-1/n+\eta<p_i=(r+i+2)/(r+i+1)\cdot y-[\eta(ny+r)]/(i+1)$ 同时成立, 故当 $i/[n(r+i)]<\eta<(i+1)/[n(r+i+1)]$ 时, 我们得到 $\widehat{\lambda}$ 的一个改进估计 $GT_i(Y)$, 其中

$$T_i(y)=\begin{cases}\dfrac{r+i+2}{r+i+1}y-\dfrac{\eta(ny+r)}{i+1}, & \text{当 } -\dfrac{r+i+1}{n}<y<\\ & <-\dfrac{r}{n}\left[1+\dfrac{i(i+1)}{\eta n(r+i)(r+i+1)-i(i+1)}\right]\text{ 时},\\ y-\dfrac{1}{n}+\eta, & \text{其它},\end{cases}$$

当$\eta=1/[n(r+1)]$时, $p_0=y-1/n+\eta, p_0=\min\{p_k\}$当且仅当$-(r+2)/n\le y\le -r/n$, 为了使上述二次函数的最低点$\psi(y,\mu)\ge p_0+\varepsilon(y)$, 即$-\dfrac{\eta(ny+r)}{r+1}-b_0\varepsilon(y)S+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k(p_k-p_0-\varepsilon(y))S^{k+1}\ge 0$, 在$-(r+2)/n\le y\le -r/n$时对$\forall S>0$成立, 其中$\varepsilon(y)>0$待定. 不难验证$p_1-p_0-\varepsilon(y)>0$, $-[\eta(ny+r)]/(r+1)-b_0\varepsilon(y)\ge 0$, $-b_0\varepsilon(y)+b_1(p_1-p_0-\varepsilon(y))\ge 0$都成立是它成立的充分条件. 故在$\eta=1/[n(r+1)]$时, $\widehat{\lambda}$是不容许的, 其一个改进估计为$GT_0^*(Y)$, 其中

$$T_0^*(y)=\begin{cases} y-\dfrac{r}{n(r+1)}+\min\{-\dfrac{(r+2)(ny+r)}{n(n+1)},\dfrac{r(ny+r+2)}{2n(r+1)(2r+5)}\}, & -\dfrac{r+2}{n}<y<-\dfrac{r}{n}\text{时},\\ y-\dfrac{r}{n(r+1)}, & \text{其它}.\end{cases}$$

当$\eta=(i+1)/[n(r+i+1)]$时, $p_i=y-1/n+\eta, p_i=\min\{p_k\}$当且仅当$-(r+i+2)/n\le y\le -(r+i)/n$, 为使上述二次函数的最低点$\psi(y,\mu)\ge p_i+\varepsilon(y)$, 即$\dfrac{-\eta(ny+r)}{r+1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k(p_k-p_i-\varepsilon(y))S^{k+1}\ge 0$, 在$-(r+i+2)/n\le y\le -(r+i)/n$时对$\forall S>0$成立, 其中$\varepsilon(y)>0$待定. 不难验证$p_{i-1}-p_i-\varepsilon(y)>0, p_{i+1}-p_i-\varepsilon(y)>0, b_{i-1}(p_{i-1}-p_i-\varepsilon(y))-b_i\varepsilon(y)\ge 0, -b_i\varepsilon(y)+b_{i+1}(p_{i+1}-p_i-\varepsilon(y))\ge 0$都成立是它的充分条件. 所以在$\eta=(i+1)/[n(r+i+1)]$时, $\widehat{\lambda}=G(Y-r/[n(r+i+1)])$是不容许的, 其一个改进估计为$GT_i^*(Y)$, 其中

$$\begin{aligned}T_i^*(y)&=\begin{cases} y-\dfrac{r}{n(r+i+1)}+\min\{\varepsilon_1(y),\varepsilon_2(y),\varepsilon_3(y),\varepsilon_4(y)\}, & -\dfrac{r+i+2}{n}<y<-\dfrac{r+i}{n}\text{时},\\ y-\dfrac{r}{n(r+i+1)}, & \text{其它},\end{cases}\\ &=\begin{cases} y-\dfrac{r}{n(r+i+1)}+\min\{\varepsilon_3(y),\varepsilon_4(y)\}, & -\dfrac{r+i+2}{n}<y<-\dfrac{r+i}{n}\text{时},\\ y-\dfrac{r}{n(r+i+1)}, & \text{其它},\end{cases}\end{aligned}$$

其中$\varepsilon_1(y)=p_{i-1}-p_i, \varepsilon_2(y)=p_{i+1}-p_i$,

$$\varepsilon_3=\frac{b_{i-1}}{b_{i-1}+b_i}(p_{i-1}-p_i)=-\frac{r(r+i+2)(ny+r+i)}{n(r+i)(r+i+1)(i^2+ri+3i+r+1)},$$
$$\varepsilon_4=\frac{b_{i+1}}{b_{i+1}+b_i}(p_{i+1}-p_i)=\frac{r(ny+r+i+2)}{n(i+2)(r+i+1)(i^2+ri+5i+2r+5)}.$$

3°. $1/n<\eta<(1+r)/n$.

我们将证明此时$\widehat{\lambda}$是容许的. 假若此时$\widehat{\lambda}$是不容许的, 则存在估计$\widehat{\delta}$, 使对任意的(μ,σ), 有$R(\mu,\sigma,\widehat{\delta})\le R(\mu,\sigma,\widehat{\lambda})$, 且在某处$(\mu_0,\sigma_0)$成立严格不等号. 由于$R(\mu,\sigma,\widehat{\delta}_c)=R(\mu+c,\sigma,\widehat{\delta})$, 其中$\widehat{\delta}_c(m,g)=\widehat{\delta}(m+c,g)-c$, 从而$\widehat{\delta}_c$亦改进了$\widehat{\lambda}$, 且在$(\mu_0+c,\sigma_0)$处优于$\widehat{\lambda}$, 故可令$\mu_0>0$.

由风险函数的连续性及[7]中关于估计可容许的充分条件知, 若能找到一列先验分布密度$\pi_k(\mu,\sigma),\mu>0$, 使

i) $r(\pi_k,\widehat{\lambda})<+\infty, r(\pi_k,\widehat{\delta}_k)<+\infty, \forall k\in \boldsymbol{N}$,

ii) 对于$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$的任意非零测子集$C$, 存在$\varepsilon_0>0$及自然数$N$, 使得当$k>N$时, 有$\iint_C\pi_k(\mu,\sigma)d\mu d\sigma\ge\varepsilon_0$,

iii) $r_k=r(\pi_k,\widehat{\lambda})-r(\pi_k,\widehat{\delta}_k)\to 0,\ k\to\infty$,

则$\widehat{\lambda}$是容许的, 其中$\widehat{\delta}_k$是相应于先验分布 π_k的Bayes估计, $r(\pi_k,\widehat{a})$是估计$\widehat{a}$相应于 π_k的后验风

险. 令

$$\pi_k(\mu,\sigma)=\begin{cases} c\cdot\dfrac{\mu^{d-2}}{\sigma^d}\exp\left\{-\dfrac{n\mu}{\sigma}\right\}h_k\left(\dfrac{n}{\sigma}\right), & \mu>0,\sigma>0,\\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $d=r/[n\eta-1]$, $h_k(t)=[1+(\ln t)^2/k]^{-1}$, c 是某合适的正常数.

先说明 $\pi_k(\mu,\sigma)$ 为密度函数, 为此只要说明积分 $\int_0^{+\infty}d\sigma\int_0^{+\infty}\mu^{d-2}/\sigma^d\exp\{-n\mu/\sigma\}h_k(n/\sigma)d\mu$ 收敛. 作变换 $\xi=n\mu/\sigma, t=n/\sigma$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}d\sigma\int_0^{+\infty}\frac{\mu^{d-2}}{\sigma^d}\exp\left\{-\frac{n\mu}{\sigma}\right\}h_k\left(\frac{n}{\sigma}\right)d\mu&=\frac{1}{n^d}\int_0^{+\infty}\xi^{d-2}\exp\{-\xi\}d\xi\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}h_k(t)dt\\&=\frac{1}{n^d}\int_0^{+\infty}\xi^{d-2}\exp\{-\xi\}d\xi\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-1}dt,\end{aligned}$$

而当 $1/n<\eta<(1+r)/n$ 时, $d>1$, 从而 $\int_0^{+\infty}\xi^{d-2}\exp\{-\xi\}d\xi$ 收敛, 再由 $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2/k)^{-1}dt$ 收敛知 $\pi_k(\mu,\sigma)$ 确为密度函数.

又

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_k(m,g)&=\frac{\iint\sigma^{-2}(\mu+\eta\sigma)p(m,g)\pi_k(\mu,\sigma)d\mu d\sigma}{\iint\sigma^{-2}p(m,g)\pi_k(\mu,\sigma)d\mu d\sigma}\\
&=\frac{\iint_{\xi<tm}(\xi+n\eta)\exp\{-t(m+\frac{r}{n}g)\}\xi^{d-2}t^r h_k(t)d\xi dt}{\iint_{\xi<tm}\exp\{-t(m+\frac{r}{n}g)\}\xi^{d-2}t^{r+1}h_k(t)d\xi dt}\\
&=m+\frac{\int_0^{+\infty}\exp\{-t(m+\frac{r}{n}g)\}t^r(tm)^{d-1}h_k(t)[n\eta-\frac{n}{r}(\eta-\frac{1}{n})(tm)]dt}{\int_0^{+\infty}\exp\{-t(m+\frac{r}{n}g)\}t^{r+1}(tm)^{d-1}h_k(t)dt}\\
&=m+\frac{m\int_0^{+\infty}\exp\{-tm(1+\frac{r}{n}z)\}(tm)^{r+d-1}h_k(t)[n\eta-\frac{n}{r}(\eta-\frac{1}{n})(tm)]dt}{\int_0^{+\infty}\exp\{-tm(1+\frac{r}{n}z)\}(tm)^{r+d}h_k(t)dt}\\
&\qquad\qquad(\text{其中 } z=g/m)\\
&=m+\frac{m\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d-1}h_k(\frac{t}{m})[n\eta-\frac{n}{r}(\eta-\frac{1}{n})t]dt}{\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d}h_k(\frac{t}{m})dt},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_k(m,g)-m-(\eta-\frac{1}{n})g&=\frac{m\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d-1}h_k(\frac{t}{m})[n\eta-\frac{n}{r}(\eta-\frac{1}{n})t]dt}{\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d}h_k(\frac{t}{m})dt}\\
&\quad-\frac{(\eta-\frac{1}{n})g\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d}h_k(\frac{t}{m})dt}{\int_0^{+\infty}\exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\}t^{r+d}h_k(\frac{t}{m})dt},\end{aligned}$$

而上式右边分子为

$$\int_0^{+\infty}\exp\left\{-t(1+\frac{r}{n}z)\right\}t^{r+d}h_k(\frac{t}{m})[\frac{n\eta m}{t}-\frac{n}{r}(\eta-\frac{1}{n})(m+\frac{r}{n}g)]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\} t^{r+d} h_k(\frac{t}{m})[\frac{n\eta}{t} - \frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n})m(1+\frac{r}{n}z)]dt,$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\} t^{r+d} h_k(\frac{t}{m})[-\frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n})m(1+\frac{r}{n}z)]dt \\
&= -\frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n})\cdot m \cdot \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\}[(r+d)t^{r+d-1}h_k(\frac{t}{m}) - t^{r+d}h_k'(\frac{t}{m})\cdot\frac{1}{m}]dt \\
&= -\frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n})\cdot m \cdot \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\}(r+d)t^{r+d-1}h_k(\frac{t}{m})dt \\
&\quad + \frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n}) \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\} t^{r+d} h_k'(\frac{t}{m})dt \\
&= -n\eta\cdot m\cdot \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\} t^{r+d-1} h_k(\frac{t}{m})dt \\
&\quad + \frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n}) \int_0^{+\infty} \exp\Big\{-t(1+\frac{r}{n}z)\Big\} t^{r+d} h_k'(\frac{t}{m})dt,
\end{aligned}$$

故有

$$\widehat{\delta}_k(m,g) - m - (\eta - \frac{1}{n})g = \frac{\frac{n}{r}(\eta - \frac{1}{n})\int_0^{+\infty} \exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\} t^{r+d} h_k'(\frac{t}{m})dt}{\int_0^{+\infty} \exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\} t^{r+d} h_k(\frac{t}{m})dt},$$

因而

$$\begin{aligned}
r_k &= \iiiint \sigma^{-2}(\widehat{\lambda} - \widehat{\delta}_k)^2 p(m,g)\pi_k(\mu,\sigma)d\mu d\sigma dm dg \\
&= c_0 \iiiint_{0<\xi<tm} (\widehat{\lambda} - \widehat{\delta}_k)^2 \exp\{-t(m+\frac{r}{n}g)+\xi\} g^{r-2} t^r \exp\{-\xi\}\xi^{d-2} t h_k(t) d\xi dt dm dg \\
&= c_1 \iint \Big[\int_0^{+\infty} \exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\} t^{r+d} h_k'(\frac{t}{m})dt\Big]^2 \cdot m^{-r-2}\cdot g^{r-2}\cdot \\
&\qquad \Big[\int_0^{+\infty} \exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\} t^{r+d} h_k(\frac{t}{m})dt\Big]^{-1} dm dg \\
&\le c_1 \iint m^{-r-2} g^{r-2} dm dg \int_0^{+\infty} \exp\{-t(1+\frac{r}{n}z)\} t^{r+d} \Big[h_k'(\frac{t}{m})\Big]^2 \Big[h_k(\frac{t}{m})\Big]^{-1} dt \\
&= c_2 \int_0^{+\infty} \omega[h_k'(\omega)]^2 [h_k(\omega)]^{-1} d\omega = 4c_2 k^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-3} dt \to 0, \qquad (k\to\infty),
\end{aligned}$$

其中c_0, c_1, c_2都是与k无关的常数.

由上面以及$r(\pi_k, \widehat{\lambda})$有限知$r(\pi_k, \widehat{\delta}_k)$有限, 另外由$\int_0^{+\infty} h_k(t)/t dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2/k)^{-1}dt \ge \int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2)^{-1}dt = \int_0^{+\infty} h_1(t)/t dt = \varepsilon_0 > 0$知所取的先验分布列$\{\pi_k(\mu,\sigma)\}$满足条件i), ii), iii), 故当$1/n < \eta < (1+r)/n$时, $\widehat{\lambda}$是可容许的.

4^o. $\eta = 1/n$或$(1+r)/n$.

当$\eta = 1/n$时, 此时$\widehat{\lambda} = X_{(1)}$, 由[4]知, 在全样本情况下, $X_{(1)}$作为$\mu + \sigma/n$的估计在平方损失下是可容许的, 故在截尾样本下, $\widehat{\lambda} = X_{(1)}$作为$\mu + \sigma/n$的估计在平方损失下仍然是可容许的.

当$\eta=(1+r)/n$时, 此时$\widehat{\lambda}=M+r/n\cdot G=n^{-1}[\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}]$, 而

$$p(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(r)})=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!}\sigma^{-r}\exp\{-\dfrac{1}{\sigma}[\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}-n\mu]\}, & \text{当}\mu\le X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(r)}\text{时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

类似于文[4], 当$\mu=\mu_0$(已知)时, 由推广的Karlin定理知$n^{-1}[\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}]-\mu_0$即$\widehat{\lambda}-\mu_0$作为$(1+r)/n\cdot\sigma$的估计在平方损失下是可容许的, 且由于$E_\sigma(\widehat{\delta}-\mu_0-(1+r)/n\cdot\sigma)^2\le E_\sigma(\widehat{\lambda}-\mu_0-(1+r)/n)^2$及$\mu_0$的任意性推得$\widehat{\delta}=\widehat{\lambda}$ a.e., [L], 故$\widehat{\lambda}$作为$\mu+(1+r)/n\cdot\sigma$的估计在平方损失下是可容许的.

综上所述, 我们有

定理3.1 在截尾样本下(截尾数为r), 关于分位点$\lambda=\mu+\eta\sigma$ ($\eta>0$已知)的最佳仿射同变估计$\widehat{\lambda}=M+(\eta-1/n)\sigma$在平方损失下的可容许性有如下结论:

i) 当$0<\eta<1/n$或$\eta>(1+r)/n$时, $\widehat{\lambda}$是不容许的,

ii) 当$1/n\le\eta\le(1+r)/n$时, $\widehat{\lambda}$是可容许的.

致谢: 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Zidek, J. V., Estimating the scale parameter of the exponential distribution with unknown location, Ann. Statist. 1(1973), 264-278.
[2] Brewster, J. F., Alternative estimators for the scale parameter of the exponential distribution with unknown location, Ann. Statist. 2(1974), 553-557.
[3] Rukhin, A. L. and Strawderman, W. E., Estimation a quantile of an exponential distribution, JASA 77(1982), 159-162.
[4] 王静龙, 指数分布位置参数和分位点的估计, 数学研究与评论, 6(1986), 113-117.
[5] Rukhin, A. L., Admissibility and minimaxity results in the estimation problem of exponential quantiles, Ann. Statist. 14(1986), 220-237.
[6] 叶慈南, 指数分布尺度参数最佳仿射同变估计的改进, 华东师范大学学报 3(1981), 7-13.
[7] Berger, J. O., Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1988.

Admissibility of the Best Affine Invariant Estimations of Parameters in Exponential Distribution

SUN XIAOQIAN
(*Huaiyin Teachers' College, Huaiyin*)

In this paper, we will prove that the best affine invariant estimation of location parameter is inadmissible, and we will consider the admissibility of best affine invariant estimation of the quantiles in the truncated two-parameter exponential distribution under quadratic loss.