应用概率统计 第四卷
第一期 1988年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 4, No. 1, Feb. 1988

随机序下的几个不等式*

程 侃 胡逸民
(中国科学院应用数学研究所)

摘 要

本文讨论了在某些随机序下寿命分布函数之间差的界. 若 F 为寿命分布, 其均值、二阶矩分别记作 $\mu(F)$, $\mu_2(F)$. 主要结果为

1) 若 $F\underset{*}{<}G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$, 则

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty|\bar F(t)-\bar G(t)|dt\leqslant 2\sqrt{\rho}$$

这里
$$\rho=p/\mu^2,\ p=\frac{1}{2}[\mu_2(G)-\mu_2(F)].$$

2) 若 $F\underset{v}{<}G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$, G 满足 Lipschitz 条件, 即

$$\forall\ x_1,x_2\geqslant 0,\quad |G(x_1)-G(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|,\quad M>0$$

常数, 则
$$\sup_{t\geqslant 0}|\bar F(t)-\bar G(t)|\leqslant\sqrt[3]{(2M)^2p}$$

最后, 还在特殊的一类寿命分布族中讨论了用 Weibull 分布作近似的界.

§1. 引 言

在可靠性数学理论中, 寿命分布之间的某些偏序关系是很重要的概念, 据此可对寿命分布进行分类. 先引进三个偏序 $\underset{c}{<}$, $\underset{*}{<}$, $\underset{v}{<}$ (见[1], [5]). 设 F, G 为两个寿命分布,

a) 称 $F\underset{c}{<}G$, 若 $G^{-1}F(x)$ 关于 x 凸.

b) 称 $F\underset{*}{<}G$, 若 $\frac{1}{x}G^{-1}F(x)\uparrow$ 对 $x>0$,

这里 $G^{-1}(t)=\inf\{x:G(x)\geqslant t\}$.

c) 称 $F\underset{v}{<}G$, 若 $\forall\ x\geqslant 0$

$$\int_x^\infty\bar F(u)du\leqslant\int_x^\infty\bar G(u)du,\quad (\bar F=1-F)$$

特别地, 若取 $\bar G(x)=\exp(-x/\mu)$, 则

$$F\underset{c}{<}G\Leftrightarrow F\in IFR$$

$$F\underset{*}{<}G\Leftrightarrow F\in IFRA$$

进一步, 若 $\mu=F$ 的均值, 则

$$F\underset{v}{<}G\Leftrightarrow F\in HNBUE.$$

---

* 科学基金资助项目.

本文1987年2月16日收到.

本文从随机序概念出发，对任意两个满足某种随机序的寿命分布，探讨其差的上界．若记分布 F 的均值、二阶矩分别为 $\mu(F)$, $\mu_2(F)$，主要结果为

1) 若 $F\underset{*}{<}G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$，则

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty|\bar{F}(t)-\bar{G}(t)|dt\leqslant 2\sqrt{\rho}$$

这里

$$\rho=p/\mu^2,\quad p=\frac{1}{2}[\mu_2(G)-\mu_2(F)].$$

2) 若 $F\underset{v}{<}G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$, G 满足 Lipschitz 条件，即

$$\forall\, x_1,\ x_2\geqslant 0,\ |G(x_1)-G(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|,\quad M>0$$

常数，则

$$\sup_{t\geqslant 0}|\bar{F}(t)-\bar{G}(t)|\leqslant\sqrt[3]{(2M)^2p}$$

最后，还在特殊的一类寿命分布族中讨论了用 Weibull 分布作近似的问题．

§2. 主要结果

先列出三种偏序间的简单关系．

引理 1 若 $F\underset{c}{<}G$，则 $F\underset{*}{<}G$．

证明显然，略．

引理 2 若 $\mu(F)=\mu(G)$, $F\underset{*}{<}G$，则 $F\underset{*}{<}G$

证 由 $F\underset{*}{<}G$，故存在 $x_0>0$ 使 $\frac{1}{x}G^{-1}F(x)$ 在 x_0 处穿过 $y=1$ 这条直线．故

$$F(x)\leqslant G(x),\quad x\leqslant x_0$$
$$F(x)\geqslant G(x),\quad x\geqslant x_0$$

因此

$$\bar{G}(x)\leqslant\bar{F}(x),\quad x\leqslant x_0$$
$$\bar{F}(x)\leqslant\bar{G}(x),\quad x\geqslant x_0$$

再利用 F,G 均值相等即可证得 $F\underset{v}{<}G$．证毕．

记

$$L(t)=\int_t^\infty[\bar{G}(u)-\bar{F}(u)]du \tag{1}$$

$$p=\int_0^\infty L(t)dt \tag{2}$$

$$A_0=\sup_{t\geqslant 0}|\bar{F}(t)-\bar{G}(t)| \tag{3}$$

引理 3 若 $F\underset{v}{<}G$，且 $\mu(F)=\mu(G)$，则

$$\sup_{t\geqslant 0}L(t)\leqslant\sqrt{A_0p}\leqslant\sqrt{p} \tag{4}$$

证 由 $F\underset{v}{<}G$ 知 $L(t)\geqslant 0$．又由 $L(0)=L(\infty)=0$，故 $\sup\limits_{t\geqslant 0}L(t)<\infty$．由 (1), $\forall t,\ h\geqslant 0$

$$-A_0h\leqslant L(t+h)-L(t)\leqslant A_0h$$

于是

$$L(t)\geqslant L(u)-A_0(u-t)\quad u\geqslant t \tag{5}$$

$$L(t) \geqslant L(u) - A_0(t-u) \quad t \geqslant u \tag{6}$$

$$L(t) < A_0 t \tag{7}$$

由(2)及(5)—(7), $\forall\ u>0$

$$p = \int_0^\infty L(t)dt \geqslant \int_{u-L(u)/A_0}^{u} L(t)dt + \int_u^{u+L(u)/A_0} L(t)dt$$

$$\geqslant \int_{u-L(u)/A_0}^{u} [L(u) - A_0(u-t)]dt + \int_u^{u+L(u)/A_0} [L(u) - A_0(t-u)]dt$$

$$= L^2(u)/A_0$$

因此

$$0 \leqslant L(u) \leqslant \sqrt{A_0 p}, \quad \forall\ u \geqslant 0 \tag{8}$$

再注意到 $A_0 \leqslant 1$, 即得(4). 证毕.

定理 1 若 $F \underset{*}{<} G$, 且 $\mu(F) = \mu(G) = \mu$, 则

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty |\bar{F}(t) - \bar{G}(t)|dt \leqslant 2\sqrt{\rho} \tag{9}$$

其中

$$\rho = p/\mu^2 \tag{10}$$

$$p = \frac{1}{2}[\mu_2(G) - \mu_2(F)], \text{由 (2) 给出} \tag{11}$$

证 不失一般性可设 $\mu=1$. 在引理 2 的证明中知, $\bar{F}(t)$ 自上而下穿过 $\bar{G}(t)$ 一次, 且仅一次. 于是

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty |\bar{F}(x) - \bar{G}(x)|dx = \frac{1}{\mu}\cdot 2\sup_{t\geqslant 0}\int_t^\infty (\bar{G}(x) - \bar{F}(x))dx$$

由引理 3 结论成立. 证毕.

定理 2 若 $F \underset{v}{<} G$, $\mu(F) = \mu(G) = \mu$, 且 G 满足 Lipschitz 条件, 即

$$\forall\ x_1,\ x_2 \geqslant 0,\ |G(x_1) - G(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|,\ \ M>0$$

常数, 则

$$\sup_{t\geqslant 0} |\bar{F}(t) - \bar{G}(t)| \leqslant \sqrt[3]{(2M)^2 p} \tag{12}$$

证 不失一般性可设 $\mu=1$. 记

$$\delta(t) = \bar{F}(t) - \bar{G}(t), \quad t \geqslant 0$$

$\forall\ t,\ h \geqslant 0$, 由 G 满足的条件得

$$\delta(t+h) - \delta(t) = \bar{F}(t+h) - \bar{G}(t+h) - \bar{F}(t) + \bar{G}(t)$$

$$\leqslant G(t+h) - G(t) \leqslant Mh$$

因此

$$\delta(t) \leqslant Mt$$

$$\delta(u) \geqslant \delta(t) - M(t-u) \quad t \geqslant u \tag{13}$$

于是 $t - \delta(t)/M \geqslant 0$, 且

$$L(t) = \int_0^t \delta(u)du = \int_0^{t-\delta(t)/M} \delta(u)du + \int_{t-\delta(t)/M}^{t} \delta(u)du$$

$$\geqslant \int_{t-\delta(t)/M}^{t} \delta(u)du \geqslant \int_{t-\delta(t)/M}^{t} [\delta(t) - M(t-u)]du$$

$$= \frac{\delta^2(t)}{2M}$$

上述第一个不等号是由于 $F\underset{v}{<}G$ 时 $L(t)\geqslant 0,\ t\geqslant 0$. 第二个不等号由(13)得. 故

$$|\delta(t)|\leqslant\sqrt{2ML(t)},\quad t\geqslant 0$$

再由引理 3,

$$|\delta(t)|\leqslant\sqrt{2M\sqrt{A_0 p}}$$

即

$$A_0=\sup_{t\geqslant 0}|\delta(t)|\leqslant\sqrt{2M\sqrt{A_0 p}}$$

简化后即得(12). 证毕.

推论 1 若 $F\in HNBUE$, 均值为 μ, 则

$$\sup_{t\geqslant 0}|\bar{F}(t)-e^{-\frac{t}{\mu}}|\leqslant\sqrt[3]{4\rho}\tag{14}$$

这里

$$\rho=1-\frac{\mu_2}{2\mu^2},\quad \mu_2=\mu_2(F)\tag{15}$$

证 容易证明 $HNBUE$ 类中 $\mu_2\leqslant 2\mu^2$, 因此 $\rho\geqslant 0$. 取定理 2 中的 G 为

$$\bar{G}(t)=\exp(-t/\mu),\quad t\geqslant 0$$

此时 $F\in HNBUE$ 等价于 $F\underset{v}{<}G$. 且又有

$$|G(t_1)-G(t_2)|\leqslant\frac{1}{\mu}|t_1-t_2|,\quad \forall\, t_1,\ t_2\geqslant 0$$

于是由定理 2 及(11)式即得推论. 证毕.

注记 推论 1 给出[4]中定理 4 的结果.

§3. 推 广

§2 推论 1 中给出了 $HNBUE$ 类中任一寿命分布用相同均值的指数分布来近似的一个界. 一般地, 若记 $\mathscr{H}$ 为某一寿命分布类. $\forall F\in\mathscr{H}$, 有不少文献讨论如何获得下式中的 $K(\rho)$, 并且尽可能地小.

$$\sup_{t\geqslant 0}|\bar{F}(t)-e^{-\frac{t}{\mu}}|\leqslant K(\rho)$$

其中

$$\mu=\mu(F),\ \rho=\left|1-\frac{\mu_2(F)}{\mu^2}\right|.$$

在这方面的研究已获相当结果. 例如:

Brown[2] 对 $IMRL$ 类得到

$$K(\rho)=\frac{\rho}{1+\rho}.$$

Brown 和葛广平[3] 对 $NBUE$ 及 $NWUE$ 类得到了

$$K(\rho)=A\sqrt{\rho},\quad A=\frac{4\sqrt{6}}{\pi}.$$

Соловьев[6] 对 IFR 类得到了

$$K(\rho)=1-\sqrt{1-2\rho},$$

对 $NBUE$ 及 $NWUE$ 类得到

$$K(\rho)=\sqrt{2\rho}.$$

何宗福和程侃[4]对 IFR, $NBUE$, $HNBUE$ 等类进行了讨论,对上述结果作出了改进.

我们现在把问题稍为推广：对某寿命分布类中的元素，能否用 Weibull 分布来近似．由于问题的困难性,本节只限于在很特殊的寿命分布类中进行讨论.

设 $\alpha>1$ 常数．考虑 Weibull 分布

$$\overline{G}_\alpha(t)=\exp\{-(C_\alpha t)^\alpha\},\quad t\geqslant 0 \tag{16}$$

其中

$$C_\alpha=\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) \tag{17}$$

再引入寿命分布类

$$\mathscr{H}_\alpha=\left\{F:F\text{ 为寿命分布},\mu(F)=1,\ -\frac{1}{x^\alpha}\log\overline{F}(x)\uparrow\text{对 }x>0\right\} \tag{18}$$

则易见如下性质.

1) $\mu(G_\alpha)=1$, $\mu_2(G_\alpha)=\dfrac{1}{C_\alpha^2}\Gamma\left(\dfrac{2}{\alpha}+1\right)$, $G_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha$.

2) $\mathscr{H}_\alpha\subset IFRA$

这是由于 $\forall F\in\mathscr{H}_\alpha$,

$$-\frac{1}{x}\log\overline{F}(x)=x^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{x^\alpha}\log\overline{F}(x)\right)\uparrow\text{对 }x>0.$$

3) 若 $F\in\mathscr{H}_\alpha$,则 $G_\alpha^{-1}F\in IFRA$, 即 $F\underset{*}{<}G_\alpha$, $\forall F\in\mathscr{H}_\alpha$.

证 由于

$$G_\alpha^{-1}(u)=\frac{1}{C_\alpha}[-\log(1-u)]^{\frac{1}{\alpha}},$$

故

$$\frac{1}{x}G_\alpha^{-1}(F(x))=\frac{1}{C_\alpha}\left[-\frac{1}{x^\alpha}\log\overline{F}(x)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\uparrow\text{对 }x>0$$

此即 $G_\alpha^{-1}F\in IFRA$ 或 $F\underset{*}{<}G_\alpha$.

4) 若 $\beta>\alpha$, 则 $G_\beta\underset{*}{<}G_\alpha$.

证 由于 $\beta>\alpha$,容易验证 $G_\beta\in\mathscr{H}_\alpha$,再由 3) 即得 $G_\beta\underset{*}{<}G_\alpha$.

5) $\mu_2(G_\alpha)\downarrow$对 $\alpha\geqslant 1$.

证 由 4) 及引理 2 知, $G_\beta\underset{v}{<}G_\alpha$,当 $\beta>\alpha$ 时．故对任意的 $x\geqslant 0$,

$$\int_x^\infty\overline{G}_\beta(u)du\leqslant\int_x^\infty\overline{G}_\alpha(u)du$$

两边对 x 从 0 到 ∞ 积分,即可证得 $\mu_2(G_\beta)\leqslant\mu_2(G_\alpha)$.

下面的定理给出了 $\mathscr{H}_\alpha$ 中的分布函数与 Weibull 分布之间的差的界.

定理 3 $\forall F\in\mathscr{H}_\alpha$,

$$\sup_{t>0}|\overline{F}(t)-\overline{G}_\alpha(t)|\leqslant K(\alpha)\sqrt[3]{\rho^*} \tag{19}$$

其中

$$\rho^*=\frac{1}{2}[\mu_2(G_\alpha)-\mu_2(F)] \tag{20}$$

$$K(\alpha)=\sqrt[3]{4M^2(\alpha)} \tag{21}$$

$$M(\alpha)=\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}e^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \tag{22}$$

证 $\forall\, t_1,\, t_2 \geqslant 0$

$$|G_\alpha(t_1)-G_\alpha(t_2)| \leqslant \max_{t\geqslant 0}|G'_\alpha(t)|\,|t_1-t_2|$$

而

$$\max_{t\geqslant 0}|G'_\alpha(t)| = \max_{t\geqslant 0}\left[\alpha\, \Gamma^\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) t^{\alpha-1}\overline{G}_\alpha(t)\right]$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}=M(\alpha)$$

由定理 2 即得(19). 证毕.

注记 对 $F\in\mathscr{H}_\alpha$,若用指数分布去近似,则由定理 2

$$\sup_{t\geqslant 0}|\overline{F}(t)-e^{-t}| \leqslant \sqrt[3]{4\rho}$$

这里 $\rho=1-\frac{1}{2}\mu_2(F)$. 但若由 Weibull 分布 $G_\alpha(t)$ 去近似, 则由(19)式给出近似的界. 在一些情形下后者的近似要好些.

例如,取定 $\alpha=2$, 则

$$M(2)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2e}}=0.760,\quad K(\alpha)=1.322$$

此时由 5),注意到均值为 1 的指数分布其二阶矩为 2,故

$$\rho=1-\frac{1}{2}\mu_2(F)>\frac{1}{2}[\mu_2(G_\alpha)-\mu_2(F)]=\rho^*,\quad \sqrt[3]{4}=1.587$$

因此,对 $\mathscr{H}_2$ 中分布,由 Weibull 分布 $G_2(t)$ 给出的近似好些.

参 考 文 献

[1] Barlow, R. E., F. Proschan, Statistical Theory of Reliability and Life Testing. *Silver Spring, MD.* 1981.

[2] Brown, M.,Approximating IMRL distributions by exponential distributions, with applications to first passage times. *Ann. Prob*, **11** (1983), 419—427.

[3] Brown, M., Ge Guangping, Exponential approximations for two classes of aging distributions. *in China-Japan Symposium on Statistics. Beijing, China*, 1984.

[4] He Zongfu, Cheng Kan, Exponential approximations in the classes of life distributins. *Submit for publication.* 1986.

[5] Ross, S. M. StochasticProcesses. Wity, New York. 1983.

[6] Барзилович, Е. Ю. и др. Вопросы математической теорий надежности. Радио и Связъ, Москва. 1983.

SOME INEQUALITIES UNDER CERTAIN STOCHASTIC ORDER

Cheng Kan Hu Yiming
(*Institute of Applied Mathematics Academia Sinica*)

In this paper we discuss the bounds of difference between two life distributions under certain stochastic orders. Let F be a life distribution, $\mu(F)$ and $\mu_2(F)$ the first and the second moments of F, respectively. The main results are as follows.

1) If $F \underset{*}{<} G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$, then

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty |\bar{F}(t)-\bar{G}(t)|\,dt \leqslant 2\sqrt{\rho}$$

where $$\rho = p/\mu^2,\quad p=\frac{1}{2}[\mu_2(G)-\mu_2(F)].$$

2) If $F \underset{v}{<} G$, $\mu(F)=\mu(G)=\mu$, and G satisfies Lipschitz condition, i.e.,

$$\forall\, x_1,\ x_2 \geqslant 0,\quad |G(x_1)-G(x_2)| \leqslant M|x_1-x_2|,\ M>0$$

is a constant, then

$$\sup_{t\geqslant 0} |\bar{F}(t)-\bar{G}(t)| \leqslant \sqrt[3]{(2M)^2 p}\,.$$

Finally, we discuss the using of Weibull distribution as an approximate bound of a special class of life distributions.