应用概率统计　第十六卷
第二期　2000年8月

Chiness Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 16 No. 3 Aug. 2000

# 对数正态分布场合无失效的BAYES验证试验方案*

何基报　　茆诗松
(华东师范大学统计系, 上海, 200062)

**摘　要**

设产品的寿命服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$, 其中 $\mu,\sigma$ 分别是位置参数和尺度参数, 本文运用了 Bayes方法, 分别给出了在 $\mu$ 未知, $\sigma^2$ 已知; $\mu,\sigma^2$ 均未知两种情况下的无失效可靠性验证试验方案, 对每一种情况都给出了一个具体的例子.

**关键词**: 后验风险准则, 零失效, BAYES验证试验, 共轭先验.
**学科分类号**: O212.3.

## §1. 引　言

在产品的生产厂家和用户签订关于购买该产品的协议中, 都有对产品的可靠性指标的要求, 譬如在一定的置信水平下, 该产品的某个可靠性指标要符合一定的要求, 同时双方要协商一种验证试验方案, 如果该试验通过, 双方可断言该产品的可靠性指标符合协议中的规定. 为减少试验时间, 无失效试验常被采用, 即已知产品的寿命分布, 假如要求产品的某个可靠性指标达到某种要求, 那么在样品数取定情况下, 无失效试验的时间应为多长?

这类问题称为可靠性验证试验问题, 对这样的问题, 如何设计出验证试验方案是一个有实用价值的问题. 当产品的寿命服从指数分布时, Martz & Waller [1] 在 1979年以失效率作为可靠性指标, 用贝叶斯方法较好地加以解决. 在对数正态分布场合和威布尔分布场合, 关于产品寿命的无失效验证试验, 至今还尚未见到有人系统地研究过. 本文将运用 BAYES方法, 给出对数分布场合下产品寿命的无失效验证试验方案.

由于在对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ 里面, 失效率 $\lambda(t)$ 是 $t$ 的函数, 所以用 $\lambda(t)$ 作为考核指标是不方便的, 这里我们以平均寿命作为考核指标, 现有 $n$ 个产品同时进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 $t$, 失效数设为 $X$, 设 $\lambda=\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}$, 于是产品的平均寿命 $\theta=e^{\lambda}$, 把 $\theta$(或 $\lambda$) 看作随机变量, 在未知参数的先验分布给定时, 对给定的 $\theta_0$, 称满足下式的 $r$ 为后验风险,

$$\mathrm{P}(\theta\geq\theta_0|X=0)\geq 1-r, \tag{1.1}$$

这是从使用方的角度来考虑的, 本文在后验风险准则下, 同时兼顾到生产方的利益, 给出以下二种情况下的贝叶斯无失效可靠性验证试验方案.

1. $\mu$ 未知, $\sigma^2$ 已知;
2. $\mu,\sigma^2$ 均未知.

对每一种情况, 本文都将给出一个例子.

*国家自然科学基金资助项目.
本文1997年9月5日收到.

# §2. $\sigma^2$已知, $\mu$未知时的验证试验方案

## 一、先验分布的确定

当 $\sigma^2$ 已知时, 关于 $\mu$ 的先验分布常有两种选取方式: 一种是无信息先验, 另一种是取 $\mu$ 的自然共轭先验, 若设 $\lambda=\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}$, 对数正态分布的密度函数变为

$$f(t|\mu,\sigma^2)=f(t|\lambda,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\ln t+\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\Big)^2\Big\}. \tag{2.1}$$

若取 $\mu$ 的先验为无信息先验: $\pi(\mu)\propto 1$, 由于 $\sigma^2$ 已知, 于是 $\pi(\lambda)\propto 1$, 设有 $n$ 个产品同时进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 $t$, 失效数为 $X$. 由于本文要用到在 $t$ 时刻以前 $n$ 个产品无一失效的无条件概率 $\mathrm{P}(X=0)$ 和给定 $X=0$ 条件下 $\lambda$ 的后验分布, 但在无信息先验情况下, 这二者都没有办法定义, 因此在本文中, 不宜取无信息先验.

鉴于以上情况, 本文取 $\lambda$ 的共轭先验为: $\lambda\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$, 即

$$\pi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\Big\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\Big\}. \tag{2.2}$$

于是得到 $\theta=e^{\lambda}$ 的先验为:

$$\theta\sim LN(\mu_0,\sigma_0^2),$$

其中 $\mu_0,\sigma_0^2$ 是二个超参数, 可以根据过去经验和工程知识给出平均寿命的上限$UL$和下限$LL$, 使得:

$$\mathrm{P}(\theta<LL)=\mathrm{P}(\theta>UL)=\frac{1-P_0}{2} \tag{2.3}$$

或

$$\mathrm{P}(\lambda<\ln LL)=\mathrm{P}(\lambda>\ln UL)=\frac{1-P_0}{2}, \tag{2.3}$$

其中 $P_0$ 可取为 0.95, 0.90 或 0.80 等等且 $LL<UL$, 即 $LL$ 和 $UL$ 分别是 $\theta$ 的先验分布的 $\dfrac{1-P_0}{2}$ 分位数和 $\dfrac{1+P_0}{2}$ 分位数, 利用 (2.3) 式有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\ln UL}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\Big\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\Big\}d\lambda=\frac{1-P_0}{2},\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\ln LL}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\Big\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\Big\}d\lambda=\frac{1-P_0}{2}.\end{cases}$$

于是可以解出

$$\begin{aligned}\mu_0&=\frac{\ln(LL)\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1+P_0}{2}\Big)-\ln(UL)\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1-P_0}{2}\Big)}{\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1+P_0}{2}\Big)-\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1-P_0}{2}\Big)},\\ \sigma_0&=\frac{\ln\dfrac{UL}{LL}}{\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1+P_0}{2}\Big)-\Phi^{-1}\Big(\dfrac{1-P_0}{2}\Big)}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

利用正态分布的分位数表可以很方便地得到 (2.4) 式中 $\mu_0$ 和 $\sigma_0^2$ 的值, 这样, 先验分布就完全确定下来了.

**二、后验概率的数值算法**

由 (2.1) 式和 (2.2) 式, 在 $n$ 个产品的失效数 $X=0$ 情况下, 可得后验密度和后验概率分别为:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda|X=0) &= \frac{\mathrm{P}(X=0|\lambda)\pi(\lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathrm{P}(X=0|\lambda)\pi(\lambda)\}d\lambda} \\
&= \frac{\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}d\lambda}, \quad (2.5)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{P}(\theta\ge\theta_0|X=0) = \frac{\int_{\lambda_0}^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}d\lambda}, \quad (2.6)
$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数, $\lambda_0=\ln\theta_0$, 给定 $\theta_0$ 和 $r$, 利用 (2.4) 式可以解以下关于 $t$ 方程

$$
\mathrm{P}(\theta\ge\theta_0|X=0)=1-r, \quad (2.7)
$$

对于给定的 $\theta_0$, 以及 $t$, (2.6) 式不容易直接求积分, 只能用数值方法. 首先要注意到由大数定律很容易获得以下引理.

**引理1** 设 $\lambda_i, i=1,\cdots,m$ 是来自密度函数为 $f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$ 的独立同分布样本, 则对任意固定的 $t>0$, a.s. 有

$$
\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda_i+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n = \int\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n f(\lambda)d\lambda=\mathrm{P}(X=0), \quad (2.8)
$$

$$
\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda_i+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n I_{[\lambda_i\ge\lambda_0]}}{\sum_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln t-\lambda_i+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\right)^n}=\mathrm{P}(\lambda\ge\lambda_0|X=0). \quad (2.9)
$$

在 $\theta_0$ 已知时, 对给定的 $\theta_0$, 由引理 1, 运用 Monte Carlo 方法可以计算出 $\mathrm{P}(\theta\ge\theta_0|X=0)$ 和 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值, 从而可运用搜索法或迭代法求出方程 (2.7) 的数值解 $t$, 然后, 计算在 $t$ 时间内, $n$ 个产品在试验中无一失效场合下的无条件概率 $\mathrm{P}(X=0)$, 这是从生产方角度考虑的, 生产方当然希望 $\mathrm{P}(X=0)$ 越大越好, 如果这个无条件概率 $\mathrm{P}(X=0)$ 偏小, 生产方难以接受, 这时生产方和使用方可进行协商, 适当调整后验风险 $r$, 再从 (2.7) 求出 $t$ 的值后, 计算 $\mathrm{P}(X=0)$, 直到求出的 $t$ 值使生产方和使用方都可以接受时为止, 即求出的 $t$ 值使得 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值达到生产方可接受的要求, 同时 $\mathrm{P}(\theta\ge\theta_0|X=0)$ 的值也达到使用方可接受的要求. 这时的 $t$ 值就是试验的截尾时间.

**三、试验方案的具体步骤**

1. 根据过去经验和工程知识给出平均寿命的上限 $UL$，下限 $LL$ 以及 $P_0$，利用 (2.4) 式，得到 $\mu_0, \sigma_0^2$ 的值，这样先验分布就确定了．

2. 对给定的 $r$ 和 $\theta_0$，用二中介绍的办法求出 $t$ 的解．

3. 计算 $\mathrm{P}(X=0)$ (即试验中无一失效发生的无条件概率)，如果 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值较小，达不到生产方可接受的要求则在使用方允许的范围内可以适当调整 $r$ 的值再重复 2 过程直到求出的 $t$ 值，使 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值达到生产方可接受的要求时为止．

4. 由 3 得到的 $t$ 值就是该验证试验方案的截尾时间．于是可靠性验证试验可以如下进行：抽取 $n$ 个产品 ($n$ 可根据实际情况事先给定) 同时进行截尾寿命试验，截尾时间为 $t$，如果在时刻 $t$ 以前无一失效发生，则厂家可以断言 (1.1) 式成立．

**例 1** 设有一批产品，其寿命服从 $LN(\mu, 2.25)$ 分布，为了使这批产品的可靠性指标达到使用方的要求，要设计一个验证试验方案．根据过去的使用经验，这种产品的寿命比较长，在定时截尾寿命试验中，经常是无一个失效发生，据此可设计如下验证试验方案：设想从这批产品中随机抽取 $n=5$ 个样品同时进行定时截尾寿命试验，截尾时间规定为 $t$，记 $X$ 为失效的个数，若在 $t$ 时刻以前无一失效发生，则产品的生产厂家可以断言这批产品达到了使用方的要求，同时也达到了生产方的要求．这两种要求是经过生产方和使用方共同协商后确定的，其中使用方的要求是：在无一失效发生的情况下，该批产品的平均寿命不小于 $\theta_0 = 10000$ 小时的后验概率至少为 70%，即

$$\mathrm{P}(\theta \geq 10000.0h | X=0) \geq 70\%,$$

也即使用方的后验风险 $r \leq 0.3$，而生产方的要求是：试验通过 (即在 $t$ 时刻以前无一失效发生) 的无条件概率 $\mathrm{P}(X=0) \geq 90\%$. 现在要问如何确定试验中的截尾时间 $t$?

表 2.1

| 时间 $t$ | $\mathrm{P}(\theta \geq 10000.0 \| X=0)$ | $\mathrm{P}(X=0)$ | 时间 $t$ | $\mathrm{P}(\theta \geq 10000.0 \| X=0)$ | $\mathrm{P}(X=0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 41.0 | 0.698680 | 0.936874 | 100.0 | 0.746218 | 0.871576 |
| 42.0 | 0.699632 | 0.935544 | 200.0 | 0.802103 | 0.795590 |
| 42.3 | 0.699922 | 0.935139 | 325.0 | 0.850035 | 0.730218 |
| 42.4 | 0.700017 | 0.935007 | 550.0 | 0.900366 | 0.646408 |
| 42.5 | 0.700118 | 0.934872 | 1000.0 | 0.949836 | 0.543399 |
| 43.0 | 0.700581 | 0.934219 | 2450.0 | 0.989900 | 0.385081 |

取这批产品的平均寿命 $\theta$ 的先验为对数正态分布 $LN(\mu_0, \sigma_0^2)$，根据过去的经验和工程知识判断有：$\mathrm{P}(\theta > 597200) = \mathrm{P}(\theta < 812) = 5\%$ 即 $LL = 812$ 小时，$UL = 597200$ 小时，利用 (2.4) 式得到 $\mu_0 = 10.0$, $\sigma_0^2 = 4.0$. 对 (2.7) 式，我们只须考虑在 $t \in (0, \theta_0] = (0, 10000]$ 范围内求 $t$ 的解 (否则，截尾时间 $t > \theta_0 = 10000$，实际意义不大)，将 $(0, \theta_0] = (0, 10000]$ 等分成 200 个区间，共得到 200 个端点 (0 除外)，计算 $\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 在这些端点的值，利用计算机画出 $\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 关于 $t$ 的图象，从图象上可以知道，$\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 在 $t > 0$ 时是递增的，其中，当 $t = 100$ 时，$\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0) = 74.62176\%$，所以截尾时间应在 (0, 100] 内，将 (0, 100] 等分成 100 个小区间，共得到 100 个端点，计算 $\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 在这些端点的值，利用计算机画出 $\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 的图象．从图象上可以知道，$\mathrm{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 在 $0 < t \leq 100$ 时是递增的，其中，在 $t=42$ 和 $t=43$ 时，$P(\theta \geq 10000|X=0)$ 的值分别为 69.96319%

和 70.05807%, 所以截尾时间应在 [42.0, 43.0] 内, 在 [42.0, 43.0] 中用搜索方法求出截尾时间 $t \approx 42.4$, 此时 $\mathsf{P}(\theta \geq 10000|X=0) = 70.00167\%$ 在该点附近的 $t$ 值所对应的 $\mathsf{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 以及 $\mathsf{P}(X=0)$ 的值见表 2.1, 同时表 2.1 列出了 $r=0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05, 0.01$ 时所对应的截尾时间 $t$, $\mathsf{P}(\theta \geq 10000|X=0)$ 和 $\mathsf{P}(X=0)$ 的值. 在 $t \approx 42.4$ 时 $\mathsf{P}(X=0) = 93.50071\%$, 即试验通过的无条件概率为 93.5%, 这样的概率生产方当然可以接受, 于是截尾时间为 42.4 小时.

**例 2**[5] 产品寿命服从对数正态分布, 均值未知, 由工程经验知其变异系数 $Cv$=2, 要求以使用方风险为 0.1 保证此产品的中位寿命至少为 $10^4$ 小时, 希望试验在 3000 小时左右结束, 试制订 LQ 抽样方案.

此例是 [5] 中的例 1, [5] 中给出的一个无失效抽样方案是: 抽取 12 个样品同时进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 3040 小时, 若在 3040 小时以前无一失效发生, 则可以有 90% 的把握认为产品的中位寿命至少为 $10^4$.

对此例, 这里我们用 Bayes 方法给出一个验证试验方案.

由于变异系数 $Cv$=2, 于是 $\sigma^2 = \ln(Cv^2+1) = 1.6094$, 由中位寿命 $t_{0.5} = 10000$ 小时, 可算得对应的平均寿命 $\theta_0 = 22360.68$ 小时, 取这批产品的平均寿命 $\theta$ 的先验为对数正态分布 $LN(\mu_0, \sigma_0^2)$, 假设根据过去的经验和工程知识判断有:

$$\mathsf{P}(\theta > 1405873h) = \mathsf{P}(\theta < 8466h) = 5\%,$$

即 $LL = 8466$ 小时, $UL = 1405873$ 小时, 利用 (2.4) 式得到 $\mu_0=11.6$, $\sigma_0^2$=2.4, 于是先验就确定了, 抽取 5 个样本同时进行定时截尾寿命试验, 在后验风险 $r=0.1$ 给定时, 运用本节三中介绍的方法, 解出 $t=830.5$ 小时, 运用本节二中的迭代算法算得 $\mathsf{P}(\theta \geq 22360.68h|X=0) = 90.00167\%$, $\mathsf{P}(X=0) = 92.94921\%$, 于是得到验证试验方案如下: 抽取 5 个样本同时进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 830.5 小时, 若在此之前无一失效发生, 则可以断言这批产品的平均寿命不小于 22360.68 小时 (即中位寿命不小于 10000 小时), 其中后验风险为 0.1.

[5] 中的方案要抽取 12 个样本同时进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 3040 小时, 本方案只要抽取 5 个样本进行定时截尾寿命试验, 截尾时间为 830.5 小时, 这两个方案的差别是由于利用先验信息引起的, 只要恰当使用先验信息, 无失效验证试验时间可缩短.

## §3. $\mu, \sigma^2$ 均未知时的验证试验方案

### 一、先验的确定

设 $n$ 个产品的寿命分别为 $t_1, \cdots, t_n$, 当对数正态分布的尺度参数和位置参数均未知时, 关于产品平均寿命的 Bayes 估计, 至今还没有一个好的方法. [2] 中关于 $\mu, \sigma^2$ 未知时的 Bayes 分析曾提到过两种先验, 一种是取 $\mu, \sigma^2$ 的联合无信息先验为:

$$g(\mu, \sigma) \propto \sigma^{-1},$$

令 $\underset{\sim}{t} = (t_1, \cdots, t_n)'$, 利用 Bayes 定理得到 $(\mu, \sigma)$ 的联合后验分布为:

$$g(\mu, \sigma|\underset{\sim}{t}) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\Big[\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{v}{2}\Big)\Big]^{-1}\Big(\frac{vS^2}{2}\Big)^{\frac{v}{2}}\sigma^{-(n+1)}\exp\Big\{-\frac{vS^2+n(\mu-\overline{z})^2}{2\sigma^2}\Big\}, \tag{3.1}$$

其中 $z_i=\ln t_i$, $\underset{\sim}{z}=(z_1,\cdots,z_n)'$, $\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln t_i$, $S^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i-\overline{z})^2$, $v=n-1$, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$.

设 $\theta=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, 但是 [2] 中指出 $\mathsf{E}(\theta|\underset{\sim}{z})=\infty$, 即后验均值是不存在的, 这不是我们所期望的.

另一种先验的取法如下: 令 $\tau=\frac{1}{\sigma^2}$, 取 $\mu|\tau\sim N[\lambda_0,(\tau_0\tau)^{-1}]$, $\tau\sim\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$, 则 $(\mu,\tau)$ 的联合先验为:

$$g(\mu,\tau;\lambda_0,\tau_0,\alpha_0,\beta_0)\propto\tau^{\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\mu-\lambda_0)^2\Big\}\tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau}\qquad(-\infty<\mu<\infty,\tau>0),\tag{3.2}$$

称 (3.2) 式为正态–伽玛分布, [2] 中指出该先验分布是联合共轭先验分布, 其后验分布也是联合正态–伽玛分布.

$$\begin{aligned}&\mu|\tau,\underset{\sim}{z}\sim N(\lambda',[(\tau_0+n)\tau]^{-1}),\qquad \text{其中 }\lambda'=\frac{\tau_0\lambda_0+n\overline{z}}{\tau_0+n},\\&\tau|\underset{\sim}{z}\sim\Gamma\Big(\alpha_0+\frac{n}{2},\beta\Big),\qquad \beta=\beta_0+\frac{vS^2}{2}+\frac{n\tau_0(\overline{z}-\lambda_0)^2}{2(\tau_0+n)},\end{aligned}$$

$(\mu,\tau)$ 的联合后验分布为:

$$g(\mu,\tau|\underset{\sim}{z},\lambda_0,\tau_0,\alpha,\beta_0)\propto\tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\tau_0+n)\tau}{2}(\mu-\lambda')^2}\tau^{\alpha_0+\frac{n}{2}-1}e^{-\beta\tau}\qquad(-\infty<\mu<\infty,\tau>0),\tag{3.3}$$

但同样有: $\mathsf{E}\Big(\exp\Big\{\mu+\frac{1}{2\tau}\Big\}\Big|\underset{\sim}{z}\Big)=\infty$. 这也不是我们所期望的.

有鉴于此, 本文将重新选取参数的先验. 为了使得产品寿命的后验均值存在, 我们在 (3.2) 式的右边乘以一个压缩因子 $e^{-\frac{a}{\tau}}(a>0,\tau>0)$, 得到以下先验分布族 (见 [8]):

$$L_1=\{\pi(\mu,\tau):\pi(\mu,\tau)=c(\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta,a)\tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\mu-\mu_0)^2}\tau^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}\},$$

其中, $\int\pi(\mu,\tau)d\mu d\tau=1$, $c(\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta,a)>0$, $\tau_0>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $a>0$, $-\infty<\mu_0<\infty$. 称 $L_1$ 中的先验分布为第 I 型压缩正态–伽玛分布. 对分布族 $L_1$, [8] 进行了一些研究, 由 [8] 知有以下结论.

**定理 1.1** ([8]) $L_1$ 是 $\mu,\tau$ 的共轭先验分布族; 产品寿命的先验均值 $\mathsf{E}^\pi(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})<\infty$ 的充要条件是 $a\geq\frac{1+\tau_0}{2\tau_0}$; 产品寿命的先验方差 $\mathsf{Var}(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})<\infty$ 的充要条件是 $a\geq\frac{2+\tau_0}{\tau_0}$.

**定理 1.2** 对给定的 $\tau_0>0,\alpha>0,\beta>0,-\infty<\mu_0<\infty$, $\mathsf{E}^\pi(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})$ 是 $\mathcal{A}=\Big\{a:a\geq\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\Big\}$ 上的严格减函数.

**证明:** 记

$$f(a)=\mathsf{E}^\pi(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})=\frac{\int_0^\infty\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{(2a-1)\tau_0-1}{2\tau_0}\frac{1}{\tau}\Big\}d\tau}{\int_0^\infty\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{a}{\tau}\Big\}d\tau},$$

由勒贝格控制收敛定理以及定理条件易知 $f(a)$ 关于 $a$ 的导数 $f'(a)$ 存在, 因此只须证明 $f'(a)<0$,

$a \in \mathcal{A}$. 易算得

$$f'(a) = \frac{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{(2a-1)\tau_0-1}{2\tau_0}\frac{1}{\tau}\Big\}d\tau\int_0^\infty \tau^{\alpha-2}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau}{\Big(\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{a}{\tau}\Big\}d\tau\Big)^2}$$
$$-\frac{\int_0^\infty \tau^{\alpha-2}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{(2a-1)\tau_0-1}{2\tau_0}\frac{1}{\tau}\Big\}d\tau\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau}{\Big(\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{a}{\tau}\Big\}d\tau\Big)^2},$$

于是只须证明

$$\frac{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau}{\int_0^\infty \tau^{\alpha-2}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau} > \frac{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{(2a-1)\tau_0-1}{2\tau_0}\frac{1}{\tau}\Big\}d\tau}{\int_0^\infty \tau^{\alpha-2}e^{-\beta\tau}\exp\Big\{-\frac{(2a-1)\tau_0-1}{2\tau_0}\frac{1}{\tau}\Big\}d\tau}. \tag{3.4}$$

令

$$f_1(a) = \frac{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau}{\int_0^\infty \tau^{\alpha-2}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{a}{\tau}}d\tau},$$

运用不等式: $(\int_0^\infty h_1(x)h_2(x)dx)^2 \le \int_0^\infty h_1^2(x)dx\int_0^\infty h_2^2(x)dx$, 其中 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 是平方可积函数．可以证明导函数 $f_1'(a) > 0, a \in \mathcal{A}$, 于是 (3.4) 式成立, 从而定理成立． □

下面就来讨论先验分布中超参数的确定方法．由于 $\pi(\mu,\tau)$ 的表达式里含有 5 个超参数 $\lambda_0$, $\sigma_0$, $\alpha$, $\beta$, $a$, 这些参数可以根据过去经验和工程知识来确定, 这里我们给出确定这些超参数的方法．

1. $\lambda_0, \tau_0$ 的确定．由 $\pi(\mu,\tau)$ 的表达式易知: $(\mu|\tau) \sim N(\mu_0, (\tau_0\tau)^{-1})$. 于是可以利用此条件分布来确定 $\mu_0, \tau_0$: 给定一个 $\tau = \frac{1}{\sigma^2}$. 由过去经验和工程知识给出产品寿命的对数均值在给定 $\tau$ 时的下限 $U_1(\tau)$ 和上限 $U_2(\tau)$, 使得 $\mathsf{P}(\mu < U_1(\tau)|\tau) = \mathsf{P}(\mu > U_2(\tau)|\tau) = \frac{1-P_0}{2}$, 即有:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\tau\tau_0}{2\pi}}\int_{-\infty}^{U_1(\tau)} e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\mu-\mu_0)^2}d\mu = \frac{1-P_0}{2}, \\ \sqrt{\frac{\tau\tau_0}{2\pi}}\int_{-\infty}^{U_2(\tau)} e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\mu-\mu_0)^2}d\mu = \frac{1+P_0}{2}. \end{cases}$$

于是可以解出

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{U_1(\tau)\Phi^{-1}\Big(\frac{1+P_0}{2}\Big) - U_2(\tau)\Phi^{-1}\Big(\frac{1-P_0}{2}\Big)}{\Phi^{-1}\Big(\frac{1+P_0}{2}\Big) - \Phi^{-1}\Big(\frac{1-P_0}{2}\Big)}, \\ \tau_0 &= \frac{\Big(\Phi^{-1}\Big(\frac{1+P_0}{2}\Big) - \Phi^{-1}\Big(\frac{1-P_0}{2}\Big)\Big)^2}{\tau(U_2(\tau)-U_1(\tau))^2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $P_0$ 可取为 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 0.99 等．这样 $\mu_0, \tau_0$ 就被选定了．

2. $a$ 的确定．$L_1$ 中的先验分布是在 (3.2) 式的先验分布的基础上乘以一个压缩因子 $e^{-\frac{a}{\tau}}$ $(a > 0, \tau > 0)$ 而得到的, 乘以一个压缩因子的目的是使得产品寿命的先验和后验均值和方差

都存在, 因此, 由定理 1.1 知, 我们选取的 $a$, 应是 $a \geq \dfrac{2+\tau_0}{\tau_0}$, 另一方面, 由于在试验期间产品没有失效, 产品的寿命一般比较长, 因此, 我们选取 $a = \underset{a\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\{\mathsf{E}^{\pi}(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})\}$ $(\underset{a\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\{\mathsf{E}^{\pi}(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})\}$ 表示使得 $\mathsf{E}^{\pi}(e^{\mu+\frac{1}{2\tau}})$ 在 $\mathcal{A}$ 上取最大值时的 $a$ 值), 由定理 1.2 知 $a = \dfrac{2+\tau_0}{\tau_0}$.

3. $\alpha,\beta$ 的确定. 选定了 $\mu_0,\tau_0,a$ 以后, 由 $\pi(\mu,\tau)$ 的表达式知, $\tau$ 的边际密度函数为:

$$f(\tau|\alpha,\beta) = c(\alpha,\beta)\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}},$$

可以由过去经验和工程知识给出产品寿命的对数方差 $\sigma^2$ 的上限 $\sigma_U^2$ 和下限 $\sigma_L^2$, 使得 $\mathsf{P}\Big(\tau > \dfrac{1}{\sigma_L^2}\Big) = \mathsf{P}\Big(\tau < \dfrac{1}{\sigma_U^2}\Big) = \dfrac{1-P_0}{2}$. 其中 $P_0$ 可以取为 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 0.99 等, 于是 $\alpha,\beta$ 可以由以下二个方程来确定:

$$\int_0^{\frac{1}{\sigma_U^2}} f(\tau|\alpha,\beta)d\tau = \frac{\int_0^{\frac{1}{\sigma_U^2}} \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\tau}{\int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\tau} = \frac{1-P_0}{2}, \tag{1}$$

$$\int_{\frac{1}{\sigma_L^2}}^{\infty} f(\tau|\alpha,\beta)d\tau = \frac{\int_{\frac{1}{\sigma_L^2}}^{\infty} \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\tau}{\int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\tau} = \frac{1-P_0}{2}. \tag{2}$$

可用迭代法来解出 $\alpha,\beta$: 给定一个初始值 $\alpha_0$ (或 $\beta_0$), 由 (1) 式解出 $\beta$ (或 $\alpha$), 记为 $\beta_0$ (或 $\alpha_0$), 再代入 (2) 解出 $\alpha$ (或 $\beta$), 记为 $\alpha_1$ (或 $\beta_1$), 用 $\alpha_1$ (或 $\beta_1$) 代入 (1) 解出 $\beta$ (或 $\alpha$), 记为 $\beta_1$ (或 $\alpha_1$), 一直进行下去, 直到收敛为止. 设满足 (1), (2) 式的解为 $(\alpha,\beta)$, 一般情况下, 在 $(\alpha,\beta)$ 的充分小的领域内这种迭代是收敛的. 这样先验分布就确定下来了.

## 二、总试验时间的确定

设有 $n$ 个产品投入试验, 截尾时间为 $t$, 无一失效 $(X=0)$ 的无条件概率为:

$$\mathsf{P}(X=0) = \int_0^{\infty} \Big(1-\Phi\Big(\sqrt{\tau}\Big(\ln t - \lambda + \frac{1}{2\tau}\Big)\Big)\Big)^n C(\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta)\tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\lambda-\frac{1}{2\tau}-\mu_0)^2}\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\lambda d\tau, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(\theta \geq \theta_0|X=0) = \mathsf{P}(\lambda \geq \lambda_0|X=0)\\ &= \frac{\int_{\lambda_0}^{\infty} \Big(1-\Phi\Big(\sqrt{\tau}\Big(\ln t - \lambda + \frac{1}{2\tau}\Big)\Big)\Big)^n \tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\lambda-\frac{1}{2\tau}-\mu_0)^2}\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}}d\lambda d\tau}{\frac{1}{C(\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta)}\mathsf{P}(X=0)},\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $\theta_0 = e^{\lambda_0}$. 令

$$g(\lambda,\tau|\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\tau_0\tau}\beta^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)}\tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\lambda-\frac{1}{2\tau}-\mu_0)^2}\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau},$$

对于给定的 $\theta_0$ 以及 $t$, (3.7) 式不容易直接求积分, 只能用数值方法, 首先要注意到由大数定律很容易获得以下引理.

**引理2** 设 $(\lambda_1,\tau_1),\cdots,(\lambda_m,\tau_m)$ 是来自密度函数为 $g(\lambda,\tau|\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta)$ 的 i.i.d 样本，则对任意给定的 $t>0$，有：

$$\frac{\sqrt{\tau_0\tau}\beta^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\tau_i}\left(\ln t-\lambda_i+\frac{1}{2\tau_i}\right)\right)\right)^n e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau_i}}=\mathrm{P}(X=0)\qquad \text{a.s.},\tag{3.8}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\tau_i}\left(\ln t-\lambda_i+\frac{1}{2\tau_i}\right)\right)\right)^n e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau_i}}I_{[\lambda\geq\ln\theta_0]}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\tau_i}\left(\ln t-\lambda_i+\frac{1}{2\tau_i}\right)\right)\right)^n e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau_i}}}=\mathrm{P}(\theta\geq\theta_0|X=0)\qquad \text{a.s.}.\tag{3.9}$$

于是，在 $\theta_0$ 已知时，可按 §2 中 (2.9) 式下面一段文字介绍的方法求出试验的截尾时间.

**三、验证试验的具体步骤**

1. 利用本节一中介绍的方法确定先验分布.
2. 对给定的 $r$ 和 $\theta_0$，用本节二中介绍的办法求出 $t$ 的解.
3. 计算 $\mathrm{P}(X=0)$(即试验中无一失效发生的无条件概率). 如果 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值太小，达不到生产方可接受的要求则可和使用方协商，适当调整 $r$ 的值再重复 2 过程直到求出的 $t$ 值，使 $\mathrm{P}(X=0)$ 的值达到生产方可接受的要求时为止.
4. 由 3 得到的 $t$ 值就是该验证试验方案的截尾时间. 于是可靠性验证试验可以如下进行：将 $n$ 个产品同时进行寿命试验，截尾时间为 $t$，如果在时刻 $t$ 以前无一失效发生，则厂家可以断言 (1.1) 式成立.

**例3** 设有一批产品，其寿命服从 $LN(\mu,\sigma^2)$ 分布，为了使这批产品的可靠性指标达到使用方的要求，要设计一个验证试验方案. 根据过去的使用经验，这种产品的寿命比较长，在定时截尾寿命试验中，经常是无一个失效发生，据此可设计如下验证试验方案：设想从这批产品中随机抽取 $n=5$ 个样品同时进行定时截尾寿命试验，截尾时间规定为 $t$，记 $X$ 为失效的个数，若在 $t$ 时刻以前无一失效发生，则产品的生产厂家可以断言这批产品达到了使用方的要求，同时也达到了生产方的要求，这两种要求是经过生产方和使用方共同协商后确定的，其中使用方的要求是：在无一失效发生的情况下，该批产品的平均寿命不小于 $\theta_0=10000$ 小时的后验概率至少为 70%，即

$$\mathrm{P}(\theta\geq 10000.0h|X=0)\geq 70\%,$$

也即使用方的后验风险 $r\leq 0.3$，而生产方的要求是：试验通过 (即在 $t$ 时刻以前无一失效发生) 的无条件概率 $\mathrm{P}(X=0)\geq 90\%$. 如何确定试验中的截尾时间 $t$?

表 3.1

| 时间 $t$ | $\mathrm{P}(\theta\geq 10000.0\|X=0)$ | $\mathrm{P}(X=0)$ |
|---|---|---|
| 825.95 | 0.750001 | 0.845507 |
| 1430.29 | 0.799999 | 0.719974 |
| 2117.58 | 0.850000 | 0.591160 |
| 2998.26 | 0.900005 | 0.457568 |
| 4379.97 | 0.950000 | 0.310188 |
| 7391.12 | 0.990000 | 0.146142 |

设这批产品的平均寿命为 $\theta=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, 令 $\lambda=\mu+\dfrac{\sigma^2}{2},\tau=\dfrac{1}{\sigma^2}$, 取 $(\lambda,\tau)$ 的共轭先验为

$$\pi(\lambda,\tau)=C(\mu_0,\tau_0,\alpha,\beta)\tau^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\tau_0\tau}{2}(\lambda-\frac{1}{2\tau}-\mu_0)^2}\tau^{\alpha-1}e^{-\beta\tau}e^{-\frac{2+\tau_0}{\tau_0}\frac{1}{\tau}},$$

取定 $\tau=1.0$, 由过去经验和工程经验判断当给定 $\tau=1$时有:

$$\mathsf{P}(\mu<7.8933)=\mathsf{P}(\mu>10.2267)=5\%.$$

利用 (3.5) 式算得 $\mu_0=9.06,\tau_0=2.0$. 于是 $a=\dfrac{2+\tau_0}{\tau_0}=2$. 假设由过去经验和工程经验知:

$$\mathsf{P}(\sigma^2<0.5125)=\mathsf{P}(\sigma^2>2.024)=5\%,$$

即

$$\mathsf{P}(\tau>1.9512)=\mathsf{P}(\tau<0.4941)=5\%,$$

取初始值为 $\alpha_0=1.4$, 运用本文介绍的迭代方法解得 $\alpha=1.5,\beta=3.5$. 于是先验分布确定为:

$$\pi(\lambda,\tau)=127.3929\tau e^{-\tau(\lambda-\frac{1}{2\tau}-\mu_0)^2}e^{-3.5\tau}e^{-\frac{2}{\tau}},$$

求出截尾时间 $t\approx 162.98$(方法同例 1), 其对应的 $\mathsf{P}(X=0)=96.3118\%$. 这样的概率生产方当然可以接受, 于是截尾时间为 162.98小时. 表 3.1列出了 $r=0.25,0.20,0.15,0.10,0.05,0.01$时所对应的 $t$, $\mathsf{P}(\theta\geq 10000.0h|X=0)$ 和 $\mathsf{P}(X=0)$ 的值.

## 参 考 文 献


[1] Martz, H.F. and Waller, R.A., A Bayesian Zero-Failure (BAZE) reliability demonstration testing procedure, *Journal of Quality Technology*, **11**(1979), 128–138.
[2] Martz, H.F. and Waller, R.A., *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley Sons, New York, 1982.
[3] Raiffa, H. and Schlaifer, R., *Applied Statistial Decision Theory*, Harvard University, Boston, 1961.
[4] 茆诗松, 王玲玲, 濮晓龙, 威布尔分布场合无失效数据的可靠性分析, 应用概率统计, **12(1)**(1996), 95–107.
[5] 王玲玲, 对数正态分布下可靠性验收方案, 电子产品可靠性与环境试验, 4(1994), 1–6.
[6] 茆诗松, 王玲玲, 可靠性统计, 华东师范大学出版社, 1989.
[7] 高惠璇, 统计计算, 北京大学出版社, 1995.
[8] 何基报, 茆诗松, 对数正态分布场合的BAYES分析以及大样本的后验分布, 应用概率统计, **14(3)**(1998), 272–283.


# A Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstraion Testing Procedure for Lognormal Distribution


JIBAO HE    SHISONG MAO

(*East China Normal University, Shanghai, 200062*)



Assume the life $t$ of product abides by the lognormal distribution, i.e. $t\sim LN(\mu,\sigma^2)$, where $\mu$ is called location parameter, $\sigma$ is called scale parameter. In this paper a Bayesian Zero-Failure reliability demonstraion testing procedure is given for each of the two cases as follows:

(1) $\mu$ is unknown, $\sigma^2$ is known,

(2) $\mu$ and $\sigma^2$ are unknown.

For each case , we give a concrete example.