应用概率统计 第二十卷
第二期 2004 年 5 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 20 No. 2 May 2004

综合报告

过程能力指数综述 *

汤淑明 王飞跃
(中科院自动化所复杂系统与智能科学重点实验室，北京， 100080)

摘 要

统计过程控制是现代化工业生产中确保产品质量和可靠性的核心方法之一，而过程能力指数则是度量一个工业过程能力的重要指标. 本文综述了过程能力指数的研究现状，首先介绍了过程能力指数的概念，然后较详细地介绍了几种主要的过程能力分析方法，并进一步说明了非正态分布的处理. 最后给出了结论，并展望了过程能力指数今后的研究和发展方向.

关 键 词：统计过程控制，过程能力，过程能力指数.
学 科 分 类 号：O213.2.

§1. 引 言

二十世纪的工业革命改变了产品的生产方式，机器加工取代了手工操作，使得工厂可以借助机器大批量地生产产品. 但由于工厂的最终产品往往是由不同工序加工的各种零部件组合而成的，使得通过大批量生产方式所形成的产品缺乏质量保障. 随着工业技术的进一步发展，为满足大规模生产的需要，要求各种零部件能达到高度的一致性和协调性. 正是这种对产品质量高度一致性的需求，促成了统计过程控制 (Statistical Process Control, SPC) 技术的出现. 在统计过程控制中，对于处于稳定状态的生产过程而言，过程所生产的产品能满足质量要求的能力称为该过程的过程能力 (Process Capability, PC)，过程能力实际上表明了质量变化与生产规格相比较的符合程度. 而过程能力指数 (Process Capability Indices, PCIs) 则是用来度量一个过程能够满足产品的性能指标要求的程度，是一个无量纲的简单数 [1,2,3].

从 1992 年至 2000 年的八年间，过程能力指数取得了迅猛的发展. 这期间，出版了四本英文专著 [4,5,6,7] 和一本德文专著 [8]. 1993 年至 2000 年的七年里，至少有 170 篇关于过程能力指数的文章问世，从理论数学期刊到实用的质量控制期刊，它们涉及的领域非常之广. 同期，还涌现出了大量的质量控制软件，增进了理论研究者与实践者的相互理解和促进. 但是，理论研究者和实践者之间仍存在很大的分歧. 主要原因是前者注重从学术的角度提出新的过程能力指数，而后者强调的则是在实际中选择什么样的过程能力指数以及如何方便地使用它们.

目前已存在的单变量过程能力指数多达 20 种，多变量过程能力指数也有 7 种. 在众多的有关过程能力指数的工作中，按照其研究方向，可以划分为两大类： a) 在各种不同的环境中，探讨过程能力指数及其估计量的特性； b) 在特定的环境中，构造新的过程能力指数，以更好地描述过程. 其中，用其它的过程指标代替过程能力指数的方法也属于后者的研究范畴. 这两个研究方向都是和过程能力指数的结构和运行特性的估计相关联的，与其相对应的研究内容包括：①过程的目标；②用户的利益；③过程能力指数的技术统计知识；④过程能力指数的估计.

研究过程能力指数的前提条件就是过程要处于统计控制状态，其中的某些变量是可以检测的，从过程中采集的数据的分布不应该是随意变化的，应该服从某单一分布 (通常为正态分布，或至少接近正态分布)，且检测变量的观察值是相互独立的. 从实用的角度出发，通常情况下，要求检测变量服从正态分布.

* 本文得到海外杰出人才引进计划、国家杰出青年基金 (基金号： 60125310) 的资助.
本文 2002 年 11 月 4 日收到， 2003 年 4 月 17 日收到修改稿.

本文的目的是综述过程能力指数的研究现状，主要根据《 Journal of Quality Technology 》 2002 年关于 PCIs 的专刊 (Vol.34, No.1) 上的文章整理而成．其内容安排如下：首先讨论过程检测变量服从正态分布时的各种过程能力指数，第二部分到第五部分介绍了单变量条件下，几种过程能力的分析方法，第六部分介绍了多变量过程能力指数；其次由于在实际的工业应用中，还有许多不服从正态分布的过程，因此第七部分介绍了对非正态分布过程的几种处理办法，最后给出了本文的结论，并展望了过程能力指数今后的研究和发展方向．

§ 2. 基本的过程能力指数

首先讨论单个检测变量服从正态分布的情况．为便于说明，我们用 U 和 L 分别表示产品性能指标的上下界， X 为表示检测变量， μ 和 σ 分别为 X 的数学期望及均方差， T 为设定目标值， $\mathsf{E}[\cdot]$ 为数学期望．同时设定 μ 位于一个特定的区间 $L \le \mu \le U$ 内，并定义 $d=(U-L)/2$, $M=(U+L)/2$.

普遍公认的基本的过程能力指数 (PCIs) 为 [2,9,10]:

$$C_{pu}=\frac{U-\mu}{3\sigma},\qquad X\le U, \tag{1}$$

$$C_{pl}=\frac{\mu-L}{3\sigma},\qquad X\ge L, \tag{2}$$

$$C_p=\frac{U-L}{6\sigma}=\frac{d}{3\sigma},\qquad X\in[L,U], \tag{3}$$

$$C_{pk}=\frac{d-|\mu-M|}{3\sigma}=\frac{\min\{U-\mu,\mu-L\}}{3\sigma}=\min\{C_{pu},C_{pl}\}, \tag{4}$$

$$C_{pm}=\frac{d}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}=\frac{d}{3\sqrt{\mathsf{E}[(X-T)^2]}}. \tag{5}$$

C_p 就是通常所说的过程能力指数，有时也称为 6σ 指数 [11]; C_{pu}, C_{pl} 为单侧过程能力指数； C_{pk} 为表现指数 [12]; C_{pm} 为 Taguchi 指数 [13]. 同时，由于 $C_{pk}\le C_p$, 因此 C_p 又常常被称为潜在的过程能力指数．当 $T=M$ 时，称为对称容差；当 $T\ne M$ 时，称为不对称容差．

总的来说，当 $C_p<1$ 时，称过程具有低能力；当 $1.0\le C_p\le 1.6$ 时，称过程具有中等能力；当 $C_p>1.6$ 时，称过程具有高能力．因此在实际的应用中，人们更多考虑的是 C_p 值大于 1 的情况，例如 C_p 取 1.33, 1.66, 甚至 2.00 的情况变得越来越普遍．一般 C_p 取为 1.3~1.6 之间．在自动化工业中，通常取 $C_{pk}=1.33$ 作为基准对过程的能力进行评估 [14,15].

另外，还有一个比较重要的混合指数 [2,16]

$$C_{pmk}=\frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\mathsf{E}[(X-T)^2]}}. \tag{6}$$

很显然，由式 (3)-(6) 可推出 $C_p\ge C_{pk}\ge C_{pmk}$, $C_p\ge C_{pm}\ge C_{pmk}$ 以及以下两式成立

$$C_{pk}=C_p-\frac{1}{3}\Big|\frac{\mu-M}{\sigma}\Big|, \tag{7}$$

$$C_{pm}=\frac{C_p}{\sqrt{1+(\mu-T/\sigma)^2}}. \tag{8}$$

当且仅当 $T=M$ 时，由式 (7) 和 (8) 可得

$$\frac{C_{pk}}{C_{pm}}=\Big(1-\frac{1}{3C_p}\Big|\frac{\mu-M}{\sigma}\Big|\Big)\sqrt{1+\Big(\frac{\mu-M}{\sigma}\Big)^2}<\Big(1-\frac{1}{3C_p}\Big|\frac{\mu-M}{\sigma}\Big|\Big)\Big[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{\mu-M}{\sigma}\Big)^2\Big]. \tag{9}$$

此时，如果

$$\frac{1}{3C_p}\Big|\frac{\mu-M}{\sigma}\Big|>\frac{1}{2}\Big(\frac{\mu-M}{\sigma}\Big)^2\quad\text{或}\quad\Big|\frac{\mu-M}{\sigma}\Big|<\frac{2}{3C_p}\quad\text{或}\quad\Big|\frac{\mu-M}{d}\Big|<\frac{2}{9C_p^2}$$

成立，那么就有 $C_{pk} < C_{pm}$. 同时，若令 $\beta = |\mu - T|/\sigma$, 则有

$$C_{pk} = \frac{-\beta}{3} + \sqrt{1+\beta^2}C_{pm} \tag{10}$$

成立 [17,18].

另外，当 $T = M$ 时，基本的过程能力指数之间存在下述关系 [19,20]

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{C_p}{C_{pm}}\right)^2 - 1}. \tag{11}$$

§ 3.　基于废品率的过程能力指数

当检测变量 X 的分布足够地接近正态分布时，C_p 和 C_{pk} 两个指数一起能够决定 X 落在指定区间 $[L, U]$ 以外的概率 p— 称为废品率 (Nonconforming, NC), 其定义如下

$$p = \Phi(-3(2C_p - C_{pk})) + \Phi(-3C_{pk}), \tag{12}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数 [21]. 同时，由于 C_{pk} 能够单独地决定废品率的上限值，即

$$p \le 2\Phi(-3C_{pk}). \tag{13}$$

因此从这个角度讲，指数 C_{pk} 比 C_p 重要．而由于 C_{pm} 决定了 Taguchi 损失函数

$$\frac{1}{C_{pm}^2} = \frac{9}{d^2}\mathsf{E}[(X-T)^2]. \tag{14}$$

因此，C_{pm} 有时也被称为“过程无能力指数”. 由式 (14) 可以看出，与传统的质量评定方法认为产品超过了性能指标的界限才会有质量损失有所不同， Taguchi 损失函数认为只要产品偏离目标值就会有质量损失．

如果 X 服从正态分布，那么该过程的废品率，即落在特定区间 $[L, U]$ 以外的概率为

$$p = \mathsf{P}\{X \notin [L, U]\} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right]. \tag{15}$$

如果 $L = \mu - 3\sigma$, $U = \mu + 3\sigma$, 那么 $U - L = 6\sigma$, $C_p = 1$. 若进一步有 $\mu = (U+L)/2 = M$、那么废品率 $p = 0.27\%$, 可见这个废品率是非常小的．但是，$C_p = 1$ 并不能保证废品率 $p = 0.27\%$, 只能确保 $p \ge 0.27\%$. 然而，如果 $C_{pk} = 1$, 那么 $\min(U-\mu, \mu-L) = 3\sigma$, 这就表明 $U - \mu \ge 3\sigma$, $\mu - L \ge 3\sigma$, 即 $L \le \mu - 3\sigma$, $U \ge \mu + 3\sigma$, 再由式 (15) 知一定有 $p \le 0.27\%$.

早在 1991 年， Carr 就提出将废品率作为一个过程能力指数 [22], 用 $\hat{p}$ 估计其观察值．后来， Yeh 和 Bhattacharya 提出了两个过程能力指数 [23], 一个是将期望的废品率与实际的废品率的比值 p_0/p 作为一个过程能力指数，其中 p_0 是期望的废品率， p 是实际的废品率，其估计量为 $p_0/\hat{p}$. 另一个过程能力指数为

$$C_f = \min\left\{\frac{p_0^L}{p^L}, \frac{p_0^U}{p^U}\right\}, \tag{16}$$

其中上标 L 、 U 用于区别 X 是小于 L, 还是大于 U. 表明检测变量 X 小于 L, 或大于 U 将对应不同的废品率．

Flaig 则一直强烈呼吁使用“正品率” (= 1− 废品率) 作为过程能力指数 [24,25,26,27], 并指出该过程能力指数适用于任何一个服从单峰分布的检测变量 X, 使用下面的 Camp-Meidell 不等式来表示

$$\mathsf{P}\{|X-\mu| < k\sigma\} \ge 1 - \frac{4}{9k^2} \tag{17}$$

或等效于

$$p \le \frac{4}{9k^2}. \tag{18}$$

而 Singpurwalla 则选择了适用于任何一种分布的更广义的 Chebyshev 不等式，用 $1-1/k^2$ 来代替式 (17) 中的 $1-4/9k^2$ [28]. 在 $L=\mu-k_1\sigma$, $U=\mu+k_2\sigma$ $(k_1,k_2>0)$ 的不对称容差条件下，有下式成立

$$\begin{aligned} p &= \mathsf{P}\{X \notin [L,U]\} \\ &= \mathsf{P}\{X<\mu-k_1\sigma\}+\mathsf{P}\{X>\mu+k_2\sigma\} \\ &= \mathsf{P}\{X-\mu<-k_1\sigma\}+\mathsf{P}\{X-\mu>k_2\sigma\} \le \mathsf{P}\{|X-\mu|>\sigma\min(k_1,k_2)\} \\ &\le \frac{4}{9}\max\Big(\frac{1}{k_1^2},\frac{1}{k_2^2}\Big). \end{aligned} \tag{19}$$

但这种过程能力分析方法与其它的过程能力指数方法有所不同，其废品率通常比较高．例如，当 $k_1=k_2=3$ 时， $p\le 4/81=4.94\%$; 当 $k_1=k_2=2$ 时， $p\le 11.11\%$. 很显然，它比 0.27% 大得多．

Flaig 不支持将废品率作为一个过程能力指数．相反，他和他的合作者认为存在某种适合于检测变量 X 的分布，可以用该分布尾部的概率估计出相应的废品率．例如， Yeh 和 Bhattacharya 就使用 Pickands 和 Smith 提出的基于极值分布理论的方法来估计废品率 [23,29,30], 而 Polansky 则使用了核算法 — 光滑非参数匹配算法 [31,32] 对废品率进行估计．

另外，也可以将废品率用损失函数的方法描述如下，即

$$\text{Loss}=\begin{cases}0, & L\le X\le U,\\ 1, & \text{否则}.\end{cases} \tag{20}$$

§4. 可行性指数

上面提到的“能力”都是指“获得的可能性”，并不是“实际具有的能力”．基于这个观点， Veevers 提出了可行性指数的概念 [33,34,35], 这是一个更广泛的定义，适用于单变量、多变量、正态分布以及非正态分布的情形．

单变量的可行性指数是指 θ 区间 (称为容许区间) 的长度 ω 与整个区间 $[L,U]$ 的长度 $2d$ 的比值，其中 θ 区间是 $(X+\theta)$ 的分布对应的废品率不大于 0.27% 的区间．该可行性指数表示如下

$$V_t=\frac{\omega}{2d}. \tag{21}$$

对于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 而言，当 μ 的容许区间为 $M-(d-3\sigma)\le\mu\le M+(d-3\sigma)$ 时，有 $\omega=2(d-3\sigma)$, 则此时的可行性指数为

$$V_t=\frac{2(d-3\sigma)}{2d}=1-\frac{1}{C_p}. \tag{22}$$

如果 $V_t<0$, 有 $C_p<1$, 那么废品率就不可能小于或等于 0.27%, 此时过程为“不可实现”过程．

§5. 修正的过程能力指数

在对 PCIs 的解释及其使用评价方面，一些学者做了大量的工作，特别是 Kotz 和 Lovelace, Singpurwalla, Palmer 和 Tsui 以及 Ruczinski 等人分别对 PCIs 的普遍性进行了深入的探讨 [6,28,36,37], 从中我们可以得到如下的结论：

(a) 如果将废品率看作最重要的指标，那么 C_{pm} 的值就是不可靠的 —— 用 Ruczinski 表可以说明一个 C_{pm} 可以对应某个范围内的多个不同的废品率；

(b) 在上述情况下， C_{pmk} 的值将更加不可靠；

(c) 在基本的过程能力指数中， C_{pk} 的使用最普遍；

(d) 当检测变量 X 的分布为非正态分布时，需特别注意非正态分布带来的影响以及如何降低或削弱这些影响的方法和途径．

同时，一些研究学者对 PCIs 做了大量的修正性研究．首先 Vännman 引入了一个超结构过程能力指数，可以用这个超结构过程能力指数推导出所有基本的 PCIs[38]，其定义为

$$C_p(u,v)=\frac{d-u|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+v(\mu-T)^2}},\qquad (u,v\geq 0), \tag{23}$$

推导可得：

$$C_p\equiv C_p(0,0),\qquad C_{pk}\equiv C_p(1,0),\qquad C_{pm}\equiv C_p(0,1),\qquad C_{pmk}\equiv C_p(1,1),$$

其中对于 $u=0$ 的情况引起了 Vännman 的特别观注．在统计特性的基础上进行详细地且具创造性的数值研究工作之后， Vännman 提出了当 $u=0$, $v=4$ 时，将会产生一个十分有用的过程能力指数．用作者自己的话说，她的研究工作在过程能力指数的应用方面取得了重大突破．对此感兴趣的读者可以查阅她的相关文章．

在 Vännman 超结构过程能力指数的基础上， Spiring 也定义了一个过程能力指数 [39]，

$$C_p^{(\omega)}\equiv C_p(0,\omega)=\frac{d}{3\sqrt{\sigma^2+\omega(\mu-T)^2}}=\frac{C_p}{\sqrt{1+\omega[(\mu-T)/\sigma]^2}}.$$

但是在这个定义中， ω 并不一定是一个常数，它可以是 $|\mu-T|/\sigma$ 的某个函数．从原则上讲，在 Spiring 的公式中 $\omega[(\mu-T)/\sigma]^2$ 可以由 $|\mu-T|/\sigma$ 的任意一个函数来代替，此时，有下式成立

$$C_p^{(\omega)}=\frac{C_p}{\sqrt{1+g(|\mu-T|/\sigma)}}, \tag{24}$$

其中 $g(\cdot)$ 可以是任意一个函数．在实际应用中，通常取 $g(\cdot)$ 为一个正定的、单调递增的函数．

从某种意义上说，现在我们已经回到了可由式 (6) 推导出的 C_{pmk} 和 C_{pk} 的关系

$$C_{pmk}=\frac{C_{pk}}{\sqrt{1+((\mu-T)/\sigma)^2}} \tag{25}$$

以及由式 (8) 所示的 C_{pm} 和 C_p 的关系上．进一步地推导可得

$$C_{pmk}=\frac{C_{pm}C_{pk}}{C_p}. \tag{26}$$

§ 6. 多变量过程能力指数

对应于单变量的过程能力指数，就会有相应的多变量的情形，用 $\mathbf{X}$ 表示向量矩阵， μ 和 $\mathbf{\Sigma}$ 分别为 $\mathbf{X}$ 的数学期望和协方差．实际上，当 $\mathbf{X}$ 为多变量时，许多的过程能力指数并不一定是多变量形式的，即使它们是多变量的，通常也是选择单变量过程能力指数的结构来表示，但是我们仍然称它们为“多变量过程能力指数” (Multi Process Capability Indices, MPCIs).

在 MPCIs 的研究中，单变量时的指定区间将由一个指定区域来代替，该区域可以由若干个分离的特定区间所组成．这个指定的区域可以是式 (27) 所描述的一个超矩形

$$\bigcap_{i=1}^{\nu}(L_i\leq X_i\leq U_i), \tag{27}$$

也可以是更复杂的区域，其复杂程度取决于 $\mathbf{X}$ 中变量间的关系的复杂程度．它的一般形式为

$$L\leq g(\mathbf{X})\leq U. \tag{28}$$

通常情况下，取 $L=0$. 同时，为了便于计算，$g(\mathbf{X})$ 通常取为 $\mathbf{X}$ 的联合概率密度的单调函数.

假设 $\mathbf{X}$ 服从多变量的正态分布 $\mathrm{N}_\nu(\mu,\mathbf{\Sigma})$, 取

$$g(\mathbf{X})=(\mathbf{X}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mu), \tag{29}$$

这里 $g(\mathbf{X})$ 服从自由度为 ν 的 χ^2 分布，且 $R=\chi^2_{\nu,1-p}$ (即自由度为 ν 的 χ^2 分布的 $100(1-p)\%$ 的分位数). 这样，我们就可以获得式 (30) 所示的椭圆区域

$$(\mathbf{X}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)\le U, \tag{30}$$

其相应的 C_p 为

$$\frac{\{(\mathbf{X}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)\le U\}\text{ 体积}}{\{(\mathbf{X}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)\le R\}\text{ 体积}}=\Big(\frac{U}{R}\Big)^{\nu}. \tag{31}$$

当 $g(\mathbf{X})>U$ 时，相应的废品率为 $p=\mathsf{P}\{g(\mathbf{X})>U\}$.

Chen 也应用了上述处理方法 [40], 所不同的是他将式 (30) 所示区域的性能指标重新定义为

$$\max_{i=1,2,\cdots,\nu}\Big(\frac{|X_i-M_i|}{d_i}\Big)\le 1, \tag{32}$$

且 $M_i=(L_i+U_i)/2$, $d_i=(U_i-L_i)/2$, 同时 Chen 将 MC_p 定义为 R^{-1}, 其中

$$\mathsf{P}\Big\{\max_{i=1,2,\cdots,\nu}\Big(\frac{|X_i-M_i|}{d_i}\Big)\le R\Big\}=1-p. \tag{33}$$

Shariari 等人提出了一个真正的多变量过程能力指数，它由三部分组成. 第一部分是形如式 (33) 所示的式子，第二部分是霍特林的 T^2 统计量

$$T^2=n(\overline{\mathbf{X}}-\mu)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\mu), \tag{34}$$

则

$$\mathsf{P}\Big\{\frac{n-\nu}{\nu(n-1)}T^2<F_{\nu,n-\nu,1-p}\Big\}=1-p. \tag{35}$$

其中 $F_{\nu,n-\nu,1-p}$ 为自由度为 $\nu,n-\nu$ 的 F 分布的 $100(1-p)\%$ 的分位数. 第三部分取决于一个修正的过程区域 (该区域是与性能指标区域相似的最小区域，是 $\mathbf{X}$ 分布上的、由一个指定的概率等高线围成的区域), 其值为 1 或 0, 表示完全或不完全包含在指定的区域中 [41].

Taam 等人也提出了由两个体积的比来定义的过程能力指数, 其分母与式 (31) 的分母相同, 且 $R=\chi^2_{\nu,1-p}$, $p=0.0027$, 分子为"修正的指定区域"的体积. 该修正的指定区域是以目标为中心的、位于原始指定区域内的最大的椭圆体 [42].

另外，对于多个检测变量而言，Veevers 的单变量可行性指数 V_t (请参看式 (21)) 可以很自然地扩展到多变量 $\mathbf{X}$ 的情况 [33], 定义如下

$$\mathbf{V}_t=\frac{\text{容许区域的体积}}{\text{指定区域的体积}}. \tag{36}$$

Veevers 仅考虑了式 (32) 为矩形区域的情形，若用 V_{ti} 表示的相应的 X_i 的可行性指数，则

$$\mathbf{V}_t=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{\nu}V_{ti}, & V_{ti}>0,\ i=1,\cdots,\nu,\\ 1-\prod\limits_{V_{ti}<0}(1-V_{ti}), & \text{否则}.\end{cases} \tag{37}$$

如果存在任意一个 X_i 不可得，那么 $\mathbf{X}$ 就不可得且有 $V_t<0$.

考虑到 MPCIs 的使用场合有限，对于其它的 MPCIs, 这里我们不再赘述，另外在下面一节的非正态分布的处理中，我们也仅讨论单变量的情形.

§7. 非正态分布的处理

正像我们所知道的那样，式 (3) 中 " 6σ " 的选取是为了满足检测变量 X 的分布尽可能地接近正态分布的需要，但是也有许多的检测变量 X 不服从正态分布，因此对非正态分布条件下的过程能力指数进行研究也是很必要的．目前，处理非正态分布的方法有很多种，大致可将其划分为三类：数据转换法、经验百分点法以及蒙特卡洛仿真法 [2,14].

在相对较早的时期，Clements 就发表了一篇很具影响力的文章 [43]. 在文中，他就提出当检测变量 X 的分布为对称的非正态分布时，可以用 X 分布的 0.135% 的点的上界和下界的差值来取代 " 6σ "．这时，新的过程能力指数为

$$C'_p = \frac{U-L}{\xi_{1-a}-\xi_a} = \frac{2d}{\xi_{1-a}-\xi_a}, \tag{38}$$

其中 ξ_a 被定义为 $\mathsf{P}\{X \le \xi_a\} = a = 0.00135$, ξ_{1-a} 和 ξ_a 分别是 X 分布的 0.135% 的点的上界和下界．对于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 有 $\xi_{1-a} = \mu + 3\sigma$, $\xi_a = \mu - 3\sigma$. 这样，对于 Veever 提出的可行性指数而言 [34], 当 X 为任一对称的单峰分布时，该可行性指数就等于 $1 - 1/C'_p$.

相应的 C'_{pk} 为

$$C'_{pk} = \frac{d - |\xi_{0.5} - M|}{\frac{1}{2}(\xi_{1-a} - \xi_a)}, \tag{39}$$

其中 $\xi_{0.5}$ 代替了数学期望 μ.

对于这种检测变量服从对称的非正态分布的情况，ISO " 69 " 技术委员会建议使用下面的计算公式 [16]

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{x_{50} - L}{x_{50} - x_{0.135}}, \frac{U - x_{50}}{x_{99.865} - x_{50}}\right\}, \tag{40}$$

其中 $x_{a\times 100} = \xi_a$.

另一种方法就是将检测变量 X 转换成 $Y = h(X)$ 的形式，这里 $h(X)$ 是 X 的连续的单调递增的函数，且 $h(X)$ 的分布足够地接近正态分布．这样我们就可以用 $h(U)$, $h(L)$ 以及 Y 的均方差来代替原始公式中的 U、L 以及 σ. 但是由于该方法与原始的指定区间关系不够明确，实际的应用中受到一定的限制．

在其它的一些方法中，包括 Kotz 和 Johnson 提出的，用 " 5.15σ " 代替 " 6σ " 的方法 [44]. 该方法的根据在于有下面的近似关系存在

$$\mathsf{P}\{\mu - 2.575\sigma \le X \le \mu + 2.575\sigma\} \approx 0.99, \tag{41}$$

该近似关系在 Γ 分布 (包含了从指数分布到正态分布的多种分布类型) 中变化是很小的．在没有足够多的数据来提供足够准确的匹配的前提下，该方法是非常有效的．但是，这里有两个不容忽视的缺点：一是当修正后的 C_p 值为 1 时，废品率的最小值只能达到 1%, 这样对大多数情况而言，这个废品率就太高了；另一个不足是 X 的分布必须被限定在 Γ 类型的分布上．

Wright(1995) 提出了一个对分布偏性敏感的过程能力指数 [45]

$$C_s = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2 + |\mu_3/\sigma|}} = \frac{(d/\sigma) - (|\mu - M|/\sigma)}{3\sqrt{1 + [(\mu - T)/\sigma]^2 + |\sqrt{\beta_1}|}}, \tag{42}$$

其中 $\mu_3 = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}(X))^3]$, $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$ 为偏性的量度．

在此基础上，Chen 和 Kotz 建议在 $|\sqrt{\beta_1}|$ 前面插入一个系数 $\gamma > 0$, 其中 γ 值的选取应该是为了获得一个期望的最优解 [46].

Bai 和 Choi 构造了一个适用于 X 为有偏分布的过程能力指数，它是一种基于"变量加权"的方法 [47]. 该方法在指定的区间 $[L, U]$ 的上界和下界上使用了不同的加权系数．在满足 $\mathsf{P}\{X \le \mu\} = P$ 的前提下，他们定义了相应的 C_p 为

$$C_p^{\omega} = \frac{d}{3\sigma\sqrt{2}}\Big[\min\Big(\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{1-p}}\Big)\Big] = \frac{C_p}{W}, \tag{43}$$

其中 $W=\sqrt{1+|1-2P|}$. 如果 $W\geq 1$, 那么 $C_p^{\omega}\leq C_p$. 当且仅当, $P=1/2$ 时等号成立. 这样, 就有

$$C_{pk}^{\omega}=\min\Big(\frac{U-\mu}{3\sigma\sqrt{2P}},\frac{\mu-L}{3\sigma\sqrt{2(1-P)}}\Big)=\frac{C_{pk}}{W}, \tag{44}$$

$$C_{pm}^{\omega}=C_{pm}/W_T \tag{45}$$

两式成立. 其中 $P_T=\mathsf{P}\{X\leq T\}$, $W_T=\sqrt{1+|1-2P_T|}$.

在对 C_{pm} 进一步修正的基础上, Johnson 等人提出了"灵活的过程能力指数" [48], 其定义为

$$C_{jkp}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\min\Big(\frac{U-T}{\mathrm{MSE}_+},\frac{T-L}{\mathrm{MSE}_-}\Big), \tag{46}$$

其中 $\mathrm{MSE}_+=\mathsf{E}\{(X-T)^2|X>T\}\mathsf{P}\{X>T\}$, $\mathrm{MSE}_-=\mathsf{E}\{(X-T)^2|X<T\}\mathsf{P}\{X<T\}$. 分母的系数 $\sqrt{2}$ 暗含着状态变量 X 服从对称分布, 且 $\mathsf{E}(X)=T$, $\mathrm{MSE}_+=\mathrm{MSE}_-=\sigma^2/2$. 有关这方面的详细介绍, 请参看 Franklin 和 Wasserman 的相关文章 [49].

§8. 结论及展望

统计过程控制是一种过程监控方法, 是现代化工业生产中确保产品质量和可靠性的一种核心算法, 而过程能力指数则是度量一个工业过程能力的重要指标, 是统计过程控制中主要的监控指数. 本文综述了过程能力指数的研究现状.

在实际的生产过程中, 人们已经越来越多地认识到研究和应用过程能力指数的必要性: a) 能够合理、全面地反映系统因素、随机因素对过程能力的影响; b) 提高产品的合格率; c) 监控产品的生产过程, 有助于查找影响产品质量波动的因素; d) 为推进连续质量改进、提高利润, 提供科学的量化指标; e) 由于过程能力指数都是无量纲的简单数, 不仅对生产过程的状态提供了简洁明了的指示, 同时也方便了操作员及时发现问题、解决问题, 使生产过程处于较高的过程能力状态, 较少损耗, 节省开支.

过程能力指数的优势是经过实践检验的, 而且几乎每个过程能力指数都有确定的含义及其自身的特点. 例如, 相对于众多的过程能力指数而言, 表现能力指数 C_{pk} 的使用最普遍, 但我们同时也应该注意到 C_p 值的大小也直接影响着 C_{pk} 值. 因此, 如何在实际应用中正确地分析问题、恰当地选择和使用现有的过程能力指数将是今后统计过程控制研究中亟待解决的问题.

同时, 使用过程能力指数时也需要注意下面的几个问题: a) 过程的输出变量是否是可以检测的; b) 所研究的过程对象是否处于统计控制状态: c) 设计目标是否位于性能指标容许区间的中心; d) 过程中的检测变量是否服从正态分布. 当检测变量 X 的分布为非正态分布时, 需特别注意非正态分布带来的影响以及如何降低或削弱这些影响的方法和途径; e) 没有一个过程能力指数能够适用于所有的过程, 而且单个的过程能力指数很难揭示过程的全貌. 因此, 在实际应用中, 一方面我们可以适当地选取适合需求的过程能力指数或选用多个过程能力指数来综合考查过程能力的方法, 另一方面恰当地使用过程能力图也会对过程能力的分析产生很大的帮助.

虽然很多的过程能力指数都是在假设检测变量服从正态分布的情况下进行讨论的, 但是这并不能说明正态分布是最适合实际检测变量的分布形式, 或者说正态分布不是保证产品质量所必需的条件, 而实际当中有大量的过程不服从正态分布, 因此本文给出了当检测变量服从非正态分布情况下的几种处理方法.

一般情况下, 实际过程中很多参数的值是无法事先准确知道的, 往往根据它们的样本数据进行估计. 例如, 对均值和均方差的估计通常采用概率统计中常用的方法

$$\widehat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \widehat{\sigma}=S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

本文对这部分内容没有进行展开介绍，有兴趣的读者可参阅相关的概率统计方面的书籍．在这里，值得一提的是，由于过程中随机因素的存在， a) 被估计参数的置信区间； b) 工厂中兆级数量级数据的在线计算及其估计量的稳定性都是今后过程能力指数的应用中值得关注的问题．

感谢 本文得到亚利桑那大学的 John S. Ramberg 教授的支持和帮助，在此表示感谢！

参 考 文 献

[1] 张杰，阳宪惠编著，王桂增审， 多变量统计过程控制, 化学工业出版社， 2000.

[2] Samuel Kotz, Norman L. Johnson, Process capability indices — a review, 1992 — 2000, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 2-19.

[3] Norma F. Hubele, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 20–22.

[4] Kotz, S. and Johnson, N.L., *Process Capability Indices*, Chapman and Hall, London, U.K., 1993a.

[5] Bothe, D.R., *Measuring Process Capability*, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1997.

[6] Kotz, S. and Lovelace, C., *Introduction to Process Capability Indices*, Arnold, London, U.K., 1998.

[7] Wheeler, D.J., *Beyond Capability Confusion*, SPC Press, Knoxville, T.N., 1999.

[8] Rinne, M. and Mittag, H.J., *Prozeßfähigkeitsmessung für die Industrielle Praxis* (with English summary), Carl Hanser Verlag München Wien, 1999.

[9] Russell A. Boyles, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 43–44.

[10] Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.

[11] Juran, J.M., *Juran's Quality Control Handbook*, 3^{rd}ed., McGraw-Hill, New York, N.Y., 1974.

[12] Kane, V.E., Process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **18**(1986), 41–52.

[13] Hsiang, T.C. and Taguchi, G., *Tutorial on Quality Control and Assurance — The Taguchi Methods*, Joint Meetings of the American Statistical Association, Las Vegas, Nevada, 1985, 188.

[14] Fred Spiring, Smiley Cheng and Anthony Yeung, Bartholomew Leung, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 23-27.

[15] Robert N. Rodriguez, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 28–31.

[16] Davis R. Bothe, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 32–37.

[17] John S. Ramberg, Discussion, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 45–50.

[18] Samuel Kotz, Norman L. Johnson, Response, *Journal of Quality Technology*, **34(1)**(2002), 51–53.

[19] Parlar, M. and Wesolowsky, G.O., Specification limits, capability indices and centering in assembly manufacture, *Journal of Quality Technology*, **31**(1999), 317–325.

[20] Kotz, S. and Johnson, N.L., Delicate relations among the basic process capability indices C_p, C_{pk} and C_{pm}, and their modifications, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **26**(1999) 849–861.

[21] 盛骤，谢式千，潘承毅， 概率论与数理统计, 高等教育出版社， 1994.

[22] Carr, W.E., A new process capability index: parts per million, *Quality Progress*, **24**(1991), 152.

[23] Yeh, A.B. and Bhattacharya, S., A robust capability index, *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **27**(1998), 565–589.

[24] Flaig, J.J., *Issues Related to Capability Indices in Process Capability Analysis Software Manual*, Section 6, Applied Technology, San Jose, C.A., 1992.

[25] Flaig, J.J., A new approach to process capability indices, *Quality Engineering*, **9**(1996), 200–211.

[26] Flaig, J.J., Process capability sensitivity analysis, *Quality Engineering*, **11**(1999), 587–592.

[27] Flaig, J.J., *Issues Related to Capability Indices in Process Capability Analysis Software Analysis*, Section 6, Applied Technology, San Jose, C.A., 2000.

[28] Singpurwalla, N.D., *The Stochastic Control of Process Capability Indices*, Test, 1998, 1–33 (Discussion: D.R. Cox, D.K. Dey, A. Fries, J.K. Ghosh, M.A. Gömez-Villegas, T.Z. Irony, W. Klieman, S. Kotz, D.V. Lindley, M.F. McGrath, and D. Pea, 33–79).

[29] Pickands, C., Statistical inference using the extreme order statistics, *Annals of Statistics*, **3**(1975), 119–131.

[30] Smith, R.L., Estimating tails of probability distributions, *Annals of Statistics*, **15**(1987), 1174–1207.

[31] Polansky, A.M., A smooth nonparametric approach to process capability, *Quality and Reliability Engineering International*, **14**(1998), 43–48.

[32] Polansky, A.M., An algorithm for computing a smooth non-parametric capability estimate, *Journal of Quality Technology*, **32**(2000), 284–289.

[33] Veevers, A., *A Capability Index for Multiple Response*, CSIRO Mathematics and Statistics Report DMS095, Australia, 1995.

[34] Veevers, A., Viability and capability indices for multi-response processes, *Journal of Applied Statistics*, **25**(1998), 545–558.

[35] Veevers, A., Capability indices for multi-response processes in *Statistical Process Monitoring and Optimization* edited by S.H. Park and G.G. Vining, Marcel-Dekker, New York, 1999, N.Y., 241–256.

[36] Palmer, K. and Tsui, K.L., A review and interpretations of process capability indices, *Annals of Operations Research*, **87**(1999), 31–47.

[37] Ruczinski, I., *The Relation Between C_{pm} and the Degree of Includence*, Doctoral Dissertation, University of Würzberg, Würzberg, Germany, 1996.

[38] Vännman, K., A unified approach to capability indices, *Statistical Sinica*, **5**(1995), 805–820.

[39] Spiring, F.A., A unifying approach to process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **29**(1997), 49–58.

[40] Chen, H., A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance zone, *Statistical Sinica*, **4**(1994), 749–758.

[41] Shariari, H., Hubele, N.F., and Lawrence, F.P., A multivariate process capability vector, *Proceedings of the 4^{th} Industrial Engineering Research Conference*, Nashville, T.N., 1995, 303–308.

[42] Taam, W., Subbaiah, P., and Liddy, J.W., A note on multivariate capability indices, *Journal of Applied Statistics*, **20**(1993), 339–351.

[43] Clements, J.A., Process capability calculations for non-normal distributions, *Quality Progress*, **22**(1989), 95–100.

[44] Kotz, S. and Johnson, N.L., Process capability indices for non-normal populations, *International Journal of Mathematical Statistical Science*, **1**(1993b), 35–44.

[45] Wright, P.A., A process capability index sensitive to skewness, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **52**(1995), 195–203.

[46] Chen, H.F. and Kotz, S., An asymptotic distribution of wright's process capability index sensitive to skewness, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **55**(1996), 147–158.

[47] Bai, D.S. and Choi, S.S., Process Capability Indices for Skewed Populations, Masters Thesis, Department of Industrial Engineering, Advanced Institute of Science and Technology, Taejon, South Korea, 1997.

[48] Johnson, N.L., Kotz, S. and Pearn, W.L., Flexible process capability indices, *Pakistan Journal of Statistics*, **10**(1994), 23–31.

[49] Franklin, L.A. and Wasserman, G.S., Bootstrap lower confidence limits estimates for C_{jkp} (the new flexible capability index), *Pakistan Journal of Statistics*, **10A**(1994), 33–45.

Recent Development in Process Capability Indices

TANG SHUMING WANG FEIYUE

(*The Key Laboratory for Complex Systems and Intelligence Science, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

A statistical process control guarantees the quality and reliability in modern industrial manufactures. Process capability indices can provide a general idea on the process capability of an industrial process. In this paper, we summed up the current study situation of process capability indices. A concept concerning process capability indices was introduced at first. Then, several analytical methods of process capability indices were presented in detail. Furthermore, we addressed some approaches to dealing with non-normality of the distribution. Finally, the conclusion, the future study and development on process capability indices were shown.