应用概率统计　第二卷
第一期　　1986 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 2. No. 1. Feb. 1986

关于 Gauss 过程增量的若干结果*

陆　传　荣
（杭州大学）

1. 引言　设 Gauss 过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 具有平稳增量，$X(0)=0$(a.s.)，$EX(t)=0$，

$$\sigma^2(h)=E(X(t+h)-X(t))^2=EX(h)^2=C_0h^{2\alpha} \tag{1}$$

其中 $C_0>0$，$0<\alpha<1$，此时过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 的样本轨道概率 1 连续.

设 $T>0$，a_T 是 T 的非降函数满足(i) $0<a_T\leqslant T$；(ii) a_T/T 不增. 记

$$\beta_T=(2\sigma^2(a_T)(\log T/a_T+\log\log T))^{-1/2},$$

$$H_X(T,\ a_T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}|X(t+s)-X(t)|,$$

$$I(T,\ a_T)=\sup_{\substack{0\leqslant t<t'\leqslant T\\ t'-t\leqslant a_T}}|X(t')-X(t)|.$$

Csörgö 和 Revesz 在[1]中对于标准 Wiener 过程 $\{W(t);\ t\geqslant 0\}$，在(i)、(ii)下证明有

$$\begin{aligned}\limsup_{T\to\infty}\beta_TH_W(T,\ a_T)&=\limsup_{T\to\infty}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\beta_T|W(T+s)-W(T)|\\ &=\limsup_{T\to\infty}\beta_T\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}|W(t+a_T)-W(t)|\\ &=\limsup_{T\to\infty}\beta_T|W(T+a_T)-W(T)|=1.\end{aligned}$$

若还满足(iii) $(\log T/a_T)/\log\log T\to\infty$，则(2)式中 lim sup 可改为 lim. J. Ortega 在[2]中把这一结果推广到满足(1)的具有平稳增量的 Gauss 过程中，证得在(i)、(ii)下有

$$\begin{aligned}\limsup_{T\to\infty}\beta_TH(T,\ a_T)&=\limsup_{T\to\infty}\beta_TI(T,\ a_T)\\ &=\limsup_{T\to\infty}\beta_T|X(T+a_T)-X(T)|=1.\end{aligned} \tag{3}$$

若还满足(iii)，则(3)式中 lim sup 可改为 lim.

本文首先推广 Levy 关于 Wiener 过程的连续模定理于满足(1)的具有平稳增量的 Gauss 过程，然后将 Hanson-Russo[3] 及林正炎、陈桂景、孔繁超[4]中关于 Wiener 过程滞后增量的性质推广于这一类 Gauss 过程.

2. 连续模定理　对于满足(1)的具有平稳增量的 Gauss 过程成立着与 Wiener 过程同样的.

定理 1(连续模定理)　设具有平稳增量的 Gauss 过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 满足(1)，那么有

---

*) 中国科学院科学基金资助的课题.
本文 1985 年 3 月 9 日收到.

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0<v<u<1\\ u-v<h}}|X(u)-X(v)|/(2\sigma^2(h)\log 1/h)^{1/2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0<t<1-h}\sup_{0<s<h}|X(t+s)-X(t)|/(2\sigma^2(h)\log 1/h)^{1/2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0<t<1-h}|X(t+h)-X(t)|/(2\sigma^2(h)\log 1/h)^{1/2}=1. \tag{4}$$

定理1的证明需要下述已知引理

引理1([2]引理2) 当$0\leqslant h\leqslant t$, $z\geqslant 4$时，有常数$C>0$使

$$P\{I(t,h)\geqslant z\sigma(h)\}\leqslant C\frac{t}{h}\frac{z^{5/\alpha-1}}{(\log z)^{2/\alpha}}\cdot\varphi(z), \tag{5}$$

其中$\varphi(z)$是标准正态密度.

引理2(Berman[6], Plackett[7], Slepian[8]) 设$\{Y_j, j=1,\cdots,n\}$是均值为0的平稳Gauss随机变量，$EY_j^2=1$, $EY_iY_j=r_{ij}$. 记$I_C^{+1}=[C,\infty)$, $I_C^{-1}=(-\infty,C)$, $C_j(j=1,\cdots,n)$为实数，记$F_j=(Y_j\in I_{C_j}^{\delta_j})$, δ_j为1或-1. K是$\{1,\cdots,n\}$的子集，则

(i) 当$\delta_i\delta_j=1$时，$P\{\bigcap_{j\in K}F_j\}$是r_{ij}的增函数，不然的话，是r_{ij}的减函数，

(ii) 若$\{K_l, l=1,\cdots,s\}$是K的一个分划，则

$$\left|P\{\prod_{j\in K}F_j\}-\prod_{l=1}^{s}P\{\prod_{j\in K_l}F_j\}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant l<m\leqslant s}\sum_{j\in K_l}\sum_{i\in K_m}|r_{ij}|\varphi(c_i,c_j;r_{ij}^*),$$

其中$\varphi(x,y,r)$是相关系数为r的二元标准正态密度，数r_{ij}^*在0与r_{ij}之间.

定理1的证明 记

$$A_h\triangleq\sup_{0<t<1-h}\sup_{0<s<h}|X(t+s)-X(t)|\leqslant\sup_{\substack{0<v<u<1\\ u-v<h}}|X(u)-X(v)|\triangleq I(h). \tag{6}$$

由引理1可推得

$$P\{I(h)\geqslant(1+\varepsilon)\sigma(h)(2\log(1/h))^{1/2}\}\leqslant\frac{C}{h}\frac{(\log(1/h))^{\frac{5}{2\alpha}-\frac{1}{2}}}{(\log\log(1/h))^{2/\alpha}}h^{(1+\varepsilon)^2}, \tag{7}$$

由此仿照[1]定理1.1.1前半部分就可推得

$$\limsup_{h\to 0}\frac{I(h)}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{1/2}}\leqslant 1. \tag{8}$$

现在往证

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0<t<1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{1/2}}\geqslant 1-\varepsilon. \tag{9}$$

对任给$\delta>0$, 令$h_n=(1+\delta)^{-n}$, 对给定$h>0$, 有n使$(1+\delta)^{-(n+1)}<h<(1+\delta)^{-n}<e^{-1/(2\alpha)}$, 此时我们有

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0<t<1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{1/2}}$$
$$\geqslant\liminf_{n\to\infty}\max_{0<k<[(1+\delta)^{n+1}]-1}\frac{\left|X\left(\frac{k+1}{(1+\delta)^{n+1}}\right)-X\left(\frac{k}{(1+\delta)^{n+1}}\right)\right|}{(2\sigma^2((1+\delta)^{-(n+1)})\log(1+\delta)^{n+1})^{1/2}}(1+\delta)^{-\alpha}$$
$$-2\limsup_{n\to\infty}\sup_{0<t<1-\frac{\delta}{(1+\delta)^{n+1}}}\sup_{0<s<\frac{\delta}{(1+\delta)^{n+1}}}$$
$$\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\left(2\sigma^2\left(\frac{\delta}{(1+\delta)^{n+1}}\right)\log\frac{(1+\delta)^{n+1}}{\delta}\right)^{1/2}}\left(\frac{\delta^{2\alpha}\log\frac{(1+\delta)^{n+1}}{\delta}}{\log(1+\delta)^{n+1}}\right)^{1/2}$$
$$\triangleq(1+\delta)^{-\alpha}I_1-2I_2$$

由(8)知 $I_2\leqslant\delta^\alpha$，又 $\lim\limits_{\delta\to0}(1+\delta)^{-\alpha}=1$. 所以余下只需证 $I_1\geqslant 1-\varepsilon$.

当 $\alpha\leqslant1/2$ 且 n 充分大时，由引理 2 我们有

$$
\begin{aligned}
I_{1n}\triangleq & P\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant(1+\delta)^n-1}\left|X\left(\frac{k+1}{(1+\delta)^n}\right)-X\left(\frac{k}{(1+\delta)^n}\right)\right|\right.\\
&\left.\leqslant(1-\varepsilon)(2\sigma^2((1+\delta)^{-n})\log(1+\delta)^n)^{1/2}\right\}\\
&\leqslant\prod_{k=0}^{[(1+\delta)^n]-1}P\{|N|\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2n\log(1+\delta)}\}\\
&\leqslant\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2n\log(1+\delta)}}e^{-(1-\varepsilon)^2n\log(1+\delta)}\right\}^{(1+\delta)^n}\\
&\leqslant(1-(1+\delta)^{-(1-\varepsilon)n})^{(1+\delta)^n}\leqslant e^{-(1+\delta)^{\varepsilon n}},
\end{aligned}
$$

其中 N 是标准正态随机变量，由此即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}I_{1n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(1+\delta)^{\varepsilon n}}<\infty.$$

当 $\alpha>1/2$ 时，由引理 2 的(i)及(ii)有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}I_{1n}\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{[(1+\delta)^n]-1}P\{|N|\leqslant(1-\varepsilon)\sqrt{2n\log(1+\delta)}\}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0\leqslant k<j\leqslant[(1+\delta)^n]-1}|r_n(k,j)|\varphi(\lambda_n,\lambda_n;r_n^*(k,j))=J_1+J_2,
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda_n=(1-\varepsilon)\sqrt{2n\log(1+\delta)}$. 由上已知上式第一个和式 J_1 是有限的，对第二个和式 J_2 有

$$J_2=C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[(1+\delta)^n]-1}\sum_{j=k+1}^{[(1+\delta)^n]-1}|r_n(k,j)|\exp\{-\lambda_n^2/(1+r_n^*(k,j))\}$$

记 $\widetilde{X}(k)=X(k/(1+\delta)^n)$，由(1)式并利用 Taylor 展开式有

$$
\begin{aligned}
|r_n^*(k,j)|\leqslant|r_n(k,j)|&=\frac{|E[\widetilde{X}(k+1)-\widetilde{X}(k)][\widetilde{X}(j+1)-\widetilde{X}(j)]|}{(E[\widetilde{X}(k+1)-\widetilde{X}(k)]^2E[\widetilde{X}(j+1)-\widetilde{X}(j)]^2)^{1/2}}\\
&=\frac{(1+\delta)^{2n\alpha}}{C}\cdot\frac{1}{2}|E[\widetilde{X}(j+1)-\widetilde{X}(k)]^2-E[\widetilde{X}(j+1)\\
&\quad-\widetilde{X}(k+1)]^2-E[\widetilde{X}(j)-\widetilde{X}(k)]^2+E[\widetilde{X}(j)-\widetilde{X}(k+1)]^2|\\
&=\frac{1}{2}|(j-k+1)^{2\alpha}-2(j-k)^{2\alpha}+(j-k-1)^{2\alpha}|
\end{aligned}
$$

由此可得 $$|r_n^*(k,j)|\leqslant|r_n(k,j)|\leqslant\min(1,C_1(j-k)^{2(\alpha-1)}).$$

所以我们有

$$
\begin{aligned}
J_2\leqslant&C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[(1+\delta)^n]-1}\sum_{j=k+1}^{k+\mu_n}\exp\left\{-\frac{1+\nu}{2}\lambda_n^2\right\}\\
&+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[(1+\delta)^n]-1}\sum_{j=k+\mu_n+1}^{[(1+\delta)^n]-1}\mu_n^{-2(1-\alpha)}\exp\left\{-\lambda_n^2+\frac{C\lambda_n^2}{\mu_n^{2(1-\alpha)}}\right\},
\end{aligned}
$$

令 $\mu_n=(1+\delta)^{n\theta}$，其中 $2\varepsilon/(1-\alpha)<\theta<\nu-2\varepsilon(1+\nu)$，$\varepsilon$ 充分地小时，$\nu>0$，这样的 θ 是可以取到的. 此时我们有

$$
\begin{aligned}
J_2\leqslant&C\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta)^n(1+\delta)^{n\theta}(1+\delta)^{-(1+\nu)(1-\varepsilon)^2n}\\
&+C\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta)^{2n}(1+\delta)^{-2(1-\alpha)n\theta}(1+\delta)^{-2(1-\varepsilon)^2n}\cdot e^{C/n^\varepsilon}<\infty
\end{aligned}
$$

这就得证当 $\alpha>1/2$ 时也有 $\sum I_{1n}<\infty$. 由此按 Borel-Cantelli 引理得 $I_1\geqslant1-\varepsilon$，这样就证明了(9)式成立.

对定理1还可作如下改进

定理2 设具有平稳增量的Gauss过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 满足(1)，那么有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{1/2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{1/2}}=1. \tag{10}$$

证明 首先来证

$$\limsup_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{1/2}}\leqslant 1. \tag{11}$$

设 $\theta>1$, $h_k=\theta^{-k}\downarrow 0(k\to\infty)$，记 $d_1(t+h,\ h)=\left(\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{1/2}$,

$$A(h)=\sup_{0\leqslant t}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}|X(t+s)-X(t)|/d_1(t+h,\ h).$$

由引理1我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{A(h_k)\geqslant 1+\varepsilon\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sup_{(n-1)h_k\leqslant t\leqslant nh_k}\sup_{0\leqslant s\leqslant h_k}|X(t+s)-X(t)|/d_1(t+h_k,\ h_k)\geqslant 1+\varepsilon\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant h_k}\sup_{0\leqslant s\leqslant h_k}|X(t+s)-X(t)|\geqslant(1+\varepsilon)(2\sigma^2(h_k)(\log n+\log\log 1/h_k))^{1/2}\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{I(h_k,\ h_k)\geqslant\sigma(h_k)(1+\varepsilon)(2(\log n+\log\log\theta^k))^{1/2}\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C\frac{(2(\log n+\log\log\theta^k))^{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\alpha}-1\right)}}{(\log(\log n+\log\log\theta^k))^{2/\alpha}}\exp\{-(1+\varepsilon)^2(\log n+\log\log\theta^k)$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(nk\log\theta)^{-(1+\varepsilon)}<\infty.$$

由Borel-Cantelli引理得证

$$\limsup_{k\to\infty}A(\theta^{-k})\leqslant 1.$$

对给定的 $h>0$，有 k 使 $h_{k+1}<h\leqslant h_k$，由此

$$\limsup_{h\to 0}A(h)\leqslant\limsup_{k\to\infty}A(\theta^{-k})\sup_{0\leqslant t}\frac{d(t+h_k,\ h_k)}{d(t+h_{k+1},\ h_{k+1})}=\theta^{\alpha},$$

让 $\theta\downarrow 1$，就得证(11)式成立.

另一方面，由定理1我们有

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{1/2}}$$

$$\geqslant\liminf_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{1/2}}\left(\frac{\log(1/h)}{\log\frac{1}{h}+\log\log\frac{1}{h}}\right)^{1/2}\geqslant 1. \tag{12}$$

由(11)和(12)就得(10)式成立.

3. 具有平稳增量的Gauss过程的滞后增量

首先类似于[3]定理3.2A，对具有平稳增量的Gauss过程的滞后增量同样有

定理 3

$$\limsup_{a\to\infty}\sup_{0<t}\frac{|X(t+a)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(a)\left(\log\frac{t+a}{a}+\log\log a\right)\right)^{1/2}}=1. \tag{13}$$

$$\limsup_{a\to\infty}\sup_{0\le t}\sup_{0<s<a}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(a)\left(\log\frac{t+a}{a}+\log\log a\right)\right)^{1/2}}=1. \tag{14}$$

证明 由[2]的定理 4 及这里的引理 1 仿照[3]定理 3.2 A 的证明即得.

定理 4 设 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 是具有平稳增量的 Gauss 过程且满足(1)，若 $0\leqslant a_T\leqslant T$，$a_T\to\infty$，则

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t<T-a_T}\frac{|X(t+a_T)-X(t)|}{d(t+a_T,\ a_T)}\leqslant 1, \tag{15}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t<T-a_T}\sup_{0<s<a_T}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{d(t+a_T,\ a_T)}\leqslant 1, \tag{16}$$

其中 $d(T,\ t)=(2\sigma^2(t)(\log T/t+\log\log t))^{1/2}$. 若(i) a_T 是到上的或 (ii) a_T/T 不增，则(15)，(16)都成立等式. 若进一步还满足(iii)$(\log T/a_T)/\log\log T\to\infty$，则 lim sup 可改为 lim.

证明 由定理 3 的(13)和(14)可得(15)和(16). 当 a_T 是到上的，在[2]定理 2 中取 $a_T=T$ 得

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T)|}{(2\sigma^2(T)\log\log T)^{1/2}}\geqslant 1,$$

又由[2]定理 3 的系有

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T)|}{(2\sigma^2(T)\log\log T)^{1/2}}\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{\sup_{0<t\le T}|X(t)|}{(2\sigma^2(T)\log\log T)^{1/2}}=1,$$

所以有重对数律

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T)|}{(2\sigma^2(T)\log\log T)^{1/2}}=1.$$

故当 a_T 到上时，我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t<T-a_T}\frac{|X(t+a_T)-X(t)|}{d(t+a_T,\ a_T)}\geqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(a_T)-X(0)|}{d(a_T,\ a_T)}$$
$$=\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T)|}{(2\sigma^2(T)\log\log T)^{1/2}}=1.$$

又当 T/a_T 不减时，由[2]的定理 3 有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0<t<T-a_T}\frac{|X(t+a_T)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(a_T)\left(\log\frac{t+a_T}{a_T}+\log\log a_T\right)\right)^{1/2}}$$
$$\geqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{|X(T)-X(T-a_T)|}{\left(2\sigma^2(a_T)\left(\log\frac{T}{a_T}+\log\log T\right)\right)^{1/2}}=1.$$

由此即得(15)成立等式，自然更有(16)成立等式.

进一步当(iii)被满足时，由[2]定理 4 我们有

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0<t<T-a_T}\frac{|X(t+a_T)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(a_T)\left(\log\frac{t+a_T}{a_T}+\log\log a_T\right)\right)^{1/2}}$$

$$\geqslant \liminf_{T\to\infty} \sup_{0<t<T-a_T} \frac{|X(t+a_T)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(a_T)\left(\log\frac{T}{a_T}+\log\log T\right)\right)^{1/2}}=1$$

故得证定理的结论成立.

定理 5 设具有平稳增量的 Gauss 过程 $\{X(t),\ t\geqslant 0\}$ 满足 (1)，其中 $2\alpha\geqslant(e-1)/e(\approx 0.632)$时，那么我们有

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{0<t<T} \sup_{0<s\leq t} \frac{|X(T)-X(T-s)|}{d(T,\ t)}=1. \tag{17}$$

仿照[3]与[4]的证明即得定理 5.

参 考 文 献

[1] Csörgö, M., Revesz, P., *Strong approximation in probability and statistics*. Academic Press, New York, 1981.

[2] Ortega, J., On the size of the increments of nonstationary Gaussian processes. *Stochastic Processes and their Appl*. **18** (1984), 47—56.

[3] Hanson, D. L., Russo, R. P., Some results on increments of the wiener process with applications to lag sums of I. I. D. random variables. *Ann. Prob*. **11** (1883), 609—623.

[4] Lin Zhengyan, Chen Guijing, Kong Fanchao, About some questions on increments of a Wiener process (to appear.)

[5] Fernique, X., Regulariete des trajectoires des fonctions aleatoires Gaussiennes, Lecture Notes in Math., No. 480, 1—96. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[6] Berman, S. M., Limit theorems for the maximum term in Stationary sequences, *Ann. Math. Statist*. **35** (1964), 502—516.

[7] Plackett, R. L., A reduction for normal multivariate integrals. *Biometrika*, **41** (1954), 351—360.

[8] Slepian, D., The one-sided barrier problem for Gaussian noise, *Bell System Tech. J*., **41** (1962), 463—501.

SOME RESULTS ON INCREMENTS OF GAUSSIAN PROCESSES

LU CHUANRONG
(*Hangzhou University*)

Let $\{X(t);\ t\geqslant 0\}$ be a Gaussian process with stationary increments, $X(0)=0$ (a. s.), $EX(t)=0$ and

$$\sigma^2(h)=EX(t+h)-X(t)^2=EX^2(h)=C_0h^{2\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1.$$

In this paper, we first prove that the Levy's theorem of the modulus of continuity of the Wiener process is also true for $\{X(t);\ t\geqslant 0\}$; i.e.

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0\leqslant v<u\leqslant 1\\ u-v\leqslant h}}\frac{|X(u)-X(v)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{\frac{1}{2}}}=\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{(2\sigma^2(h)\log(1/h))^{\frac{1}{2}}}=1 \quad \text{a.s.}$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}\frac{|X(t+s)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{\left(2\sigma^2(h)\left(\log\frac{t+h}{h}+\log\log\frac{1}{h}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=1 \quad \text{a.s.}$$

Furthermore, we point out that some results on increments of the Wiener processes in [3] and [4] remain true for the increments of $\{X(t);\ t\geqslant 0\}$.