应用概率统计　第一卷
第二期　1985年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 1. No. 2. Nov. 1985

条件密度的强相合的双重核估计

孙　东　初
(华东师范大学)

根据从总体抽取的一个样本去估计总体分布的密度函数，在实际应用中具有重要意义. 然而在非参数回归、条件分布和条件分位数的估计时，经常要用到条件密度，为此，我们考虑条件密度如下形式的核估计.

设$(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$是来自总体分布为$G$的$R^p\times R^q$中的i.i.d.样本，$g$为总体分布的密度，此时$h(x)=\int_{R^q} g(x, y)dy$为$X_1$的边际密度，$f(y|x)=g(x, y)/h(x)$是给定$X_1=x$后$Y$的条件密度(假定$0/0=0$).

设K_1, K_2分别是R^p和R^q上的Boeel可测函数，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$为常数列，称

$$f_n(y|x)=\sum_{i=1}^n K_1\Big(\frac{x-X_i}{a_n}\Big)K_2\Big(\frac{y-Y_i}{b_n}\Big)\Big/\Big\{b_n^q\sum_{j=1}^n K_1\Big(\frac{x-X_j}{a_n}\Big)\Big\}\tag{1}$$

为$f(y|x)$的双重核估计，(K_1, K_2)为核函数，(a_n, b_n)为窗宽.

本文定理1给出使$f_n(y|x)$逐点强相合，即对固定的$x\in R^p$和$y\in R^q$使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y|x)=f(y|x),\quad \text{a.s.}\tag{2}$$

成立的条件；定理2给出$f_n(y|x)$一致强相合即使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in S}\sup_{y}|f_n(y|x)-f(y|x)|=0,\quad \text{a.s.}\tag{3}$$

成立的条件，这里S是R^p中的某个子集.

对任一$x=(x^1, \cdots, x^p)\in R^p$, $y=(y^1, \cdots, y^q)\in R^q$，令

$$\|x\|_p=\sup_{1\leqslant i\leqslant p}|x^i|,\qquad \|y\|_q=\sup_{1\leqslant i\leqslant q}|y^i|,$$

简记$\|x\|=\|x\|_p$, $\|y\|=\|y\|_q$, $a=a_n$, $b=b_n$,

$$g_n(x, y)=(na^pb^q)^{-1}\sum_{i=1}^n K_1\Big(\frac{x-X_i}{a}\Big)K_2\Big(\frac{y-Y_i}{b}\Big),$$

$$h_n(x)=(na^p)^{-1}\sum_{i=1}^n K_1\Big(\frac{x-X_i}{a}\Big)$$

本文约定C, d均表示与n无关的正常数，ε是任意给定的正数. 上述$h_n(x)$即是$h(x)$的Rosenblatt估计，我们将看到$g_n(x, y)$也是$g(x, y)$的一个相合估计，而

$$f_n(y|x)=g_n(x, y)/h_n(x),\quad (0/0=0).$$

定理1　假设

1) g有界且$h(u)=\int g(u, v)dv$关于u一致可积；

本文1984年11月15日收到.

2) K_1, K_2 有界可积且 $\int_{R^p} K_1(u)du=\int_{R^q} K_2(v)dv=1$;

3) 窗宽 (a, b) 满足

$$\lim_{n\to\infty} a=\lim_{n\to\infty} b=0 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} na^p b^q/\log n=\infty \tag{5}$$

则对于 g 的连续点 (x, y), 当 $h(x)>0$ 时, (2)式成立.

为证定理 1, 首先给出若干引理, 引理 2 见 Hoeffding[1].

引理 1 设 K_1, K_2 和 $W(u, v)$ 分别是 R^p, R^q 和 $R^p\times R^q$ 上的可测函数, 满足

1) K_1, K_2 有界;

2) $\int|K_1(u)|du<\infty$, $\int|K_2(v)|dv<\infty$;

3) W 有界.

又设正的常数列 $a=a_n$, $b=b_n$ 满足(4)式. 记

$$W_n(x, y)=(a^p b^q)^{-1}\int_{R^{p+q}} K_1\left(\frac{u}{a}\right)K_2\left(\frac{v}{b}\right)W(x-u, y-v)du\,dv$$

则当 (x, y) 是 W 的连续点时, 有

$$\lim_{n\to\infty} W_n(x, y)=W(x, y)\int_{R^p} K_1(u)\,du\int_{R^q} K_2(v)dv, \tag{6}$$

又设 W 一致连续时,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x,y}\left|W_n(x, y)-W(x, y)\int_{R^p} K_1(u)du\int_{R^q} K_2(v)dv\right|\right\}=0. \tag{7}$$

证 记 $M=\sup\limits_{u,v}|W(u, v)|$, 对任意取定的 $\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|W_n(x, y)-W(x, y)\int_{R^p} K_1(u)\,du\int_{R^q} K_2(v)dv\right|\\
&\leqslant \sup_{|u|<\delta}\sup_{|v|<\delta}|W(x-u, y-v)-W(x, y)|\int_{R^p}|K_1(u)|du\int_{R^q}|K_2(v)|dv\\
&\quad+2M\int_{R^p}|K_1(u)|du\cdot\int_{\|v\|>\delta/b}|K_2(v)|dv\\
&\quad+2M\int_{R^q}|K_2(v)|dv\cdot\int_{\|u\|>\delta/a}|K_1(u)|du,
\end{aligned} \tag{8}$$

由条件 2)及 W 在 (x, y) 处连续知 δ 充分小时(8)式第一项可以任意小, 再由条件 2)及 $a\to0$, $b\to0$, $(n\to\infty)$ 知(8)式后二项 $\to0(n\to\infty)$, 从而引理 1 前一结论成立, 类似可知后一结论也成立.

引理 2 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为独立 r.v., 且存在有限常数 M 致 $P(|\xi_i|\leqslant M)=1$, $i=1, \cdots, n$, 又 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_i$, 则

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i/n\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2\exp\{-n\varepsilon^2/(2\sigma^2+M\varepsilon)\}. \tag{9}$$

定理 1 的证明. 由条件 2), 3)及 g 有界, 运用引理 1 知

$$\lim_{n\to\infty} Eg_n(x, y)=g(x, y), \tag{10}$$

现令 $\xi_i=(a^p b^q)^{-1}\{K_1((x-X_i)/a)K_2((y-Y_i)/b)-EK_1((x-X_i)/a)K_2((y-Y_i)/b)\}$,

$i=1, \cdots, n$, $M_1=\sup\limits_u |K_1(u)|$, $M_2=\sup\limits_v|K_2(v)|$, $M_3=\sup\limits_{u,v} g(u, v)$, $M=2M_1M_2/a^pb^q$, 运用引理 2 和(10)知 n 充分大时

$$P(|g_n(x, y)-g(x, y)|>\varepsilon)\leqslant P\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i/n\right|>\varepsilon/2\right)$$
$$\leqslant 2\exp\{-n\varepsilon^2a^pb^q/4M_1M_2(2M_3+\varepsilon)\}=2\exp\{-dna^pb^q\}. \tag{11}$$

再由 $h(u)=\int_{R^q} g(u, v)dv$ 一致可积知存在有限常数 M_0 使得 $\int_{\|v\|>M_0} g(u, v)dv<\varepsilon$, 对一切 $u\in R^p$. 故由 g 有界知 h 有界且 h 在 x 处连续, 由[2]可知

$$P(|h_n(x)-h(x)|>\varepsilon)\leqslant 2\exp\{-dna^p\}\leqslant 2\exp\{-dna^pb^q\}. \tag{12}$$

由(5)式知 $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n(x, y)-g(x, y))=0$, a.s., 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n(x)-h(x))=0$, a.s., 再因 $h(x)>0$, 即知

$$\lim_{n\to\infty}\{g_n(x, y)/h_n(x)-g(x, y)/h(x)\}=0, \quad \text{a.s.}$$

由定理 1 的证明可知: 对适当选取的核 (K_1, K_2) 和窗宽 (a, b), $g_n(x, y)$ 是联合密度 $g(x, y)$ 的渐近无偏估计和逐点强相合估计. 特别地取 $a_n=b_n$, 则 $g_n(x, y)$ 就是 $g(x, y)$ 的 Rosenblatt 估计.

以下假定 K_1 和 K_2 分别是 R^p 和 R^q 上的有界概率密度. 记

$$L_1(z)=\sup_{\|x\|\geqslant z} K_1(x), \quad L_2(z)=\sup_{\|y\|\geqslant z} K_2(y), \quad z\in[0, \infty),$$
$$L_1^{-1}(t)=\sup\{z: L_1(z)\geqslant t\}, \quad t\in[0, \sup_x K_1(x)),$$
$$L_2^{-1}(t)=\sup\{z: L_2(z)\geqslant t\}, \quad t\in[0, \sup_y K_2(y)).$$

定理 2 假设

1) g 在 R^{p+q} 上一致连续且 $h(x)=\int_{R^q} g(x, y)dy$ 关于 x 一致可积;

2) K_1 和 K_2 分别是 R^p 和 R^q 上 Riemann 可积的有界概率密度;

3) 窗宽 (a_n, b_n) 满足(4)式;

4) $\inf\limits_{x\in S} h(x)>0$, 这里 S 是 R^p 中某个子集.

则当下述条件 5)—8)之一满足时, (3)式成立.

5) K_1 和 K_2 的支撑集都是有界集且(5)式成立;

6) K_1 的支撑集是有界集且

$$\int_0^\infty z^{q-1}L_2(z)dz<\infty \tag{13}$$
$$na^pb^p/\{[L_2^{-1}(\varepsilon b^q)]^q \log n\}\to\infty, \quad (n\to\infty) \tag{14}$$

7) K_2 的支撑集是有界集且

$$\int_0^\infty z^{p-1}L_1(z)dz<\infty \tag{15}$$
$$na^pb^q/\{[L_1^{-1}(\varepsilon a^p)]^p \log n\}\to\infty, \quad (n\to\infty) \tag{16}$$

8) K_1 和 K_2 分别满足(15)和(13)式且

$$na^pb^q/\{[L_1^{-1}(\varepsilon a^p)]^p[L_2^{-1}(\varepsilon b^q)]^q \log n\}\to\infty, \quad (n\to\infty) \tag{17}$$

注 1 容易验证(17)⇒(14)⇒(5); (17)⇒(16)⇒(5) 且

$$na^p b^{2q}/\log n\to\infty(n\to\infty)\Rightarrow(14);$$
$$na^{2p}b^q/\log n\to\infty(n\to\infty)\Rightarrow(16);$$
$$na^{2p}b^{2q}/\log n\to\infty(n\to\infty)\Rightarrow(17).$$

注 2 对某个 $\delta>0$, 易知

$$\lim_{\|y\|\to\infty}\|y\|^{q+\delta}K_2(y)=0\Rightarrow(13)\Rightarrow\lim_{\|y\|\to\infty}\|y\|^q K_2(y)=0;$$
$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|^{p+\delta}K_1(x)=0\Rightarrow(15)\Rightarrow\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|^p K_1(x)=0.$$

引理 3 记 G 是 (X, Y) 的概率分布, G_n 是 (X_1, Y_1), $\cdots$, (X_n, Y_n) 的经验分布,

$\mathscr{A}_{c_1}=\{A: A$ 为 R^p 中矩形且 $\sup\limits_{u,x\in A}\|u-x\|\leqslant c_1\}$, $\quad c_1>0$

$\mathscr{B}_{c_2}=\{B: B$ 为 R^q 中矩形且 $\sup\limits_{v,y\in B}\|v-y\|\leqslant c_2\}$, $\quad c_2>0$,

$\mathscr{A}_{c_1}\times\mathscr{B}_{c_2}=\{A\times B: A\in\mathscr{A}_{c_1},\ B\in\mathscr{B}_{c_2}\}$,

若对某 $r_1>0$, $r_2>0$, $M>0$, 有

$$\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{2r_1}\times\mathscr{B}_{2r_2}}G(A\times B)\leqslant M\leqslant\frac{1}{4}\tag{18}$$

则当 $n\geqslant\max\left\{\frac{1}{M},\ \frac{8M}{\varepsilon^2}\right\}$ 时,

$$\begin{aligned}P\{&\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{2r_1}\times\mathscr{B}_{2r_2}}|G_n(A\times B)-G(A\times B)|\geqslant\varepsilon\}\\&\leqslant16(2n)^{2(p+q)}\exp\{-n\varepsilon^2/(64M+4\varepsilon)\}+8n\exp\{-nM/10\}.\end{aligned}\tag{19}$$

引理 3 是[2]中(2.2)的推广, 证法类似, 故略去.

引理 4 设 g 在 R^{p+q} 上一致连续且定理 2 条件 2) 和 3) 满足, 则当条件 5)—8) 之一成立时, 有

$$P(\sup_{x,y}|g_n(x, y)-g(x, y)|\geqslant\varepsilon)\leqslant cn^{2(p+q)}\exp\{-dna^p b^q\}.\tag{20}$$

证 因 g 一致连续故有界, 由引理 1 得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x,y}|Eg_n(x, y)-g(x, y)|=0.$$

从而当 n 充分大时

$$P\left(\sup_{x,y}|g_n(x, y)-g(x, y)|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\sup_{x,y}|g_n(x, y)-Eg_n(x, y)|\geqslant\frac{5}{6}\varepsilon\right),\tag{21}$$

由定理 2 条件 2) 知 $M_1=\sup\limits_x K_1(x)$ 和 $M_2=\sup\limits_y K_2(y)$ 都有限且对任意给定的 η, δ, $\rho>0$, 存在函数 $K_1^*(x)=\sum\limits_{i=1}^{N_1}\alpha_i I_{A_i}(x)$ 和 $K_2^*(y)=\sum\limits_{i=1}^{N_2}\beta_i I_{B_i}(y)$, 满足:

1. α_1, $\cdots$, α_{N_1}, β_1, $\cdots$, β_{N_2} 都是非负实数;
2. A_1, $\cdots$, A_{N_1} 是 $[-\rho, \rho]^p$ 上不交矩形而 B_1, $\cdots$, B_{N_2} 是 $[-\rho, \rho]^q$ 上不交矩形;
3. $K_1^*(x)\leqslant M_1$, $K_2^*(y)\leqslant M_2$;
4. $|K_1^*(x)-K_1(x)|\leqslant\eta$, $\quad x\in[-\rho, \rho]^p-D_1$,
   $|K_2^*(y)-K_2(y)|\leqslant\eta$, $\quad y\in[-\rho, \rho]^q-D_2$;
5. $D_1\subset D_1^*=\bigcup\limits_{i=1}^{N_3}A_{1i}$, A_{1i} 是 $[-\rho, \rho]^p$ 中矩形且 $\lambda(D_1^*)<\sqrt{\delta}$,

$$D_2\subset D_2^*=\bigcup_{i=1}^{N_4}B_{2i},\ B_{2i}\text{是 }[-\rho,\ \rho]^q\text{ 中矩形且 }\lambda(D_2^*)<\sqrt{\delta};$$

这里 λ 表示 Lebesque 测度. 记 G_n 为 $(X_1,\ Y_1),\ \cdots,\ (X_n,\ Y_n)$ 的经验分布；对于任意实数 $\alpha,\ \beta$ 及 $A\subset R^p,\ B\subset R^q$，令 $(x+\alpha A)\times(y+\beta B)=\{(x+\alpha u,\ y+\beta v):u\in A,\ v\in B\}$；记

$$E_1=\{(u,\ v):\|x-u\|>\rho a,\ \|y-v\|\leqslant\rho b\},$$
$$E_2=\{(u,\ v):\|x-u\|>\rho a,\ \|y-v\|\leqslant\rho b\},$$
$$E_3=\{(u,\ v):\|x-u\|\leqslant\rho a,\ \|y-v\|>\rho b\},$$
$$E_4=(x+aD_1)\times(y+bD_2),$$
$$E_5=(E_1\cup E_2\cup E_3)^c\cap E_4^c,$$
$$E_6=(x+aD_1^*)\times(y+bD_2^*),$$

这里 $(\cdot)^c$ 表示一个集合的余集，则

$$\begin{aligned}
&\sup_{x,y}|g_n(x,\ y)-Eg_n(x,\ y)|\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{5}\sup_{x,y}\int_{E_i}(a^pb^q)^{-1}\left|K_1\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2\left(\frac{y-v}{b}\right)-K_1^*\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2^*\left(\frac{y-v}{b}\right)\right|dG(u,\ v)\\
&\quad+\sup_{x,y}(a^pb^q)^{-1}\left|\int K_1^*\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2^*\left(\frac{y-v}{b}\right)dG(u,\ v)-\int K_1^*\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2^*\left(\frac{y-v}{b}\right)dG_n(u,\ v)\right|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{5}\sup_{x,y}\int_{E_i}(a^pb^q)^{-1}\left|K_1^*\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2^*\left(\frac{y-v}{b}\right)-K_1\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2\left(\frac{y-v}{b}\right)\right|dG_n(u,\ v)\\
&\triangleq\sum_{i=1}^{5}U_{1i}+U_2+\sum_{i=1}^{5}U_{3i},
\end{aligned}\tag{22}$$

注意到 K_1^* 和 K_2^* 分别在 $[-\rho,\ \rho]^p$ 和 $[-\rho,\ \rho]^q$ 外为 0，故

$$U_{1i}=(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}\int_{E_i}K_1\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2\left(\frac{y-v}{b}\right)dG(u,\ v),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\tag{23}$$

$$U_{3i}=(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}\int_{E_i}K_1\left(\frac{x-u}{a}\right)K_2\left(\frac{y-v}{b}\right)dG_n(u,\ v),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\tag{24}$$

记 $M_3=\sup_{x,y}g(x,\ y)$，由于在 E_5 上 $|K_1^*K_2^*-K_1K_2|\leqslant(M_1+M_2)\eta$，故

$$\begin{aligned}
&U_{14}\leqslant 2M_1M_2M_3(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}\lambda(E_4)\leqslant 2M_1M_2M_3\delta\leqslant C\delta;\\
&U_{15}\leqslant(2\rho)^{p+q}M_3(M_1+M_2)\eta\leqslant C\rho^{p+q}\eta;\\
&U_{34}\leqslant M_1M_2(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}|G_n(E_6)|\\
&\qquad\leqslant M_1M_2N_3N_4(a^pb^q)^{-1}\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{\rho a}\times\mathscr{B}_{\rho b}}|G_n(A\times B)-G(A\times B)|+C\delta;\\
&U_{35}\leqslant(M_1+M_2)\eta(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}G_n((E_1\cup E_2\cup E_3)^c)\\
&\qquad\leqslant(M_1+M_2)\eta(a^pb^q)^{-1}\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{\rho a}\times\mathscr{B}_{\rho b}}|G_n(A\times B)\times G(A\times B)|+C\rho^{p+q}\eta\\
&U_2\leqslant N_1N_2M_1M_2(a^pb^q)^{-1}\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{\rho a}\times\mathscr{B}_{\rho b}}|G_n(A\times B)-G(A\times B)|,
\end{aligned}$$

当定理 2 条件(8)成立时，从(23)和(24)式得

$$U_{11}+U_{31}\leqslant C\int_\rho^\infty t^{p-1}L_1(t)dt\int_\rho^\infty z^{q-1}L_2(z)dz+J_1,$$

$$U_{12}+U_{32}\leqslant C\int_\rho^\infty t^{p-1}L_1(t)dt+J_2,$$

$$U_{13}+U_{33}\leqslant C\int_\rho^\infty z^{q-1}L_2(z)dz+J_3,$$

$$J_1=\sup_{x,y}(a^pb^q)^{-1}\left|\int_{E_1}L_1\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)L_2\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG_n(u,v)\right.$$
$$\left.-\int_{E_1}L_1\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)L_2\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG(u,v)\right|,$$
$$J_2=M_2\sup_{x,y}(a^pb^q)^{-1}\left|\int_{E_2}L_1\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)dG_n(u,v)-\int_{E_2}L_1\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)dG(u,v)\right|,$$
$$J_3=M_1\sup_{x,y}(a^pb^q)^{-1}\left|\int_{E_3}L_2\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG_n(u,v)-\int_{E_3}L_2\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG(u,v)\right|,$$

将上述各式代入(22)式,可得

$$\sup_{x,y}|g_n(x,y)-Eg_n(x,y)|\leqslant C\rho^q\int_\rho^\infty t^{p-1}L_1(t)dt+C\rho^p\int_\rho^\infty z^{q-1}L_2(z)dz$$
$$+C\int_\rho^\infty t^{p-1}L_1(t)dt\int_\rho^\infty z^{q-1}L_2(z)dz+C\delta+C\rho^{p+q}\eta$$
$$+C(a^pb^q)^{-1}\sup_{A\times B\in\mathscr{A}_{\rho a}\times\mathscr{B}_{\rho b}}|G_n(A\times B)-G(A\times B)|+J_1+J_2+J_3$$
$$\triangleq\sum_{i=1}^6 I_i+\sum_{i=1}^3 J_i. \tag{25}$$

由(13)和(15)式成立, 可选取 ρ 充分大, δ 和 η 充分小, 使(25)式中 $\sum\limits_{i=1}^5 I_i<\varepsilon/6$, 再固定 ρ, δ 和 η, 令 $r_1=\rho a$, $r_2=\rho b$, $M=(2\rho)^{p+q}M_3a^pb^q$, 运用引理 3, 知 $n\geqslant\max(1/M,\ 8M\cdot 36C^2/(\varepsilon^2a^{2p}b^{2q}))$时,

$$P(I_6\geqslant\varepsilon/6)\leqslant Cn^{2(p+q)}\exp\{-dna^pb^q\} \tag{26}$$

由(21)和(25)式知,要证(20)式,只需证明当 ρ 和 n 充分大时

$$P(J_i\geqslant\varepsilon/6)\leqslant Cn^{2(p+q)}\exp\{-dna^pb^q\},\quad i=1,2,3. \tag{27}$$

令 $L_i'(t)=L_i(t)I_{(t>\rho)}$, $i=1, 2$, 对给定的正整数 l 和 $j=1,\cdots,l$, 令

$$S_{1j}=\{x:(j-1)L_1(\rho)/l<L_1(\|x\|)\leqslant jL_1(\rho)/l\},\ T_{1j}=S_{1j}\cup S_{1j+1}\cup\cdots\cup S_{1l},$$
$$S_{2j}=\{y:(j-1)L_2(\rho)/l<L_2(\|y\|)\leqslant jL_2(\rho)/l\},\ T_{2j}=S_{2j}\cup S_{2j+1}\cup\cdots\cup S_{2l},$$
$$L_1''(x)=\sum_{j=1}^l(j-1)l^{-1}L_1(\rho)I_{S_{1j}}(x),\quad L_2''(y)=\sum_{j=1}^l(j-1)l^{-1}L_2(\rho)I_{S_{2j}}(y),$$

易见
$$|L_1'(\|x\|)L_2'(\|y\|)-L_1''(x)L_2''(y)|\leqslant[M_1L_2(\rho)+M_2L_1(\rho)]/l,$$
$$L_1''(x)L_2''(y)=\sum_{i,j}^l(i-1)(j-1)l^{-2}L_1(\rho)L_2(\rho)I_{S_{1i}}(x)I_{S_{2j}}(y),$$

对所有 x 和 y 成立,故

$$J_1=\sup_{x,y}(a^pb^q)^{-1}\left|\int L_1'\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)L_2'\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG_n(u,v)\right.$$
$$\left.-\int L_1'\left(\frac{\|x-u\|}{a}\right)L_2'\left(\frac{\|y-v\|}{b}\right)dG(u,v)\right|$$
$$\leqslant\frac{M_1M_2}{l^2a^pb^q}\sup_{x,y}\left|\sum_{i,j}^l(i-1)(j-1)\{G_n[(x+aS_{1i})\times(y+bS_{2j})]\right.$$
$$\left.-G[(x+aS_{1i})\times(y+bS_{2j})]\}\right|+2[M_1L_2(\rho)+M_2L_1(\rho)]/(a^pb^pl).$$

令 $l=[a^{-p}b^{-q}]$, 可取 ρ 充分大,使第二项 $<\varepsilon/12$, 而第一项

$$\leqslant M_1M_2(a^pb^q)^{-1}\sup_{x,y}\sup_{2\leqslant i,j\leqslant l}|G_n[(x+aT_{1i})\times(y+bT_{2j})]$$
$$-G[(x+aT_{1i})\times(y+bT_{2j})]|,$$

由于 T_{1i} 是 R^p 中两个直径至多 $2L_1^{-1}(L_1(\rho)/l)$ 的同心矩形的差,而 T_{2i} 是 R^q 中两个直径至多

$2L_2^{-1}(L_2(\rho)/l)$的同心矩形的差，故

$$\text{上式右边} \leqslant M_1 M_2 \sup_{A\times B\in \mathscr{A}'\times\mathscr{B}'} |G_n(A\times B)-G(A\times B)|$$

其中 $\mathscr{A}'\times\mathscr{B}'=\{A\times B$: A 为 R^p 中矩形且 $\sup\limits_{u,\, x\in A}\|x-u\|\leqslant 2aL_1^{-1}(L_1(\rho)/l)$, B 为 R^q 中矩形且 $\sup\limits_{v,y\in B}\|y-v\|\leqslant 2bL_2^{-1}(L_2(\rho)/l)\}$，类似(26)的证明可知：若(17)式满足，则(27)中 $i=1$ 成立；若(16)式满足，则(27)式中 $i=2$ 成立，而(14)满足时，(27)式中 $i=3$ 成立．至此证明了定理 2 条件 8)满足时(20)式成立；假设条件 7)满足，则 ρ 充分大时，$J_1=J_3=0$，故(20)式成立；假设条件 6) 满足，则 ρ 充分大时，$J_1=J_2=0$，故(20)式成立；最后设条件 5)满足，则 ρ 充分大时 $J_1=J_2=J_3=0$．故(20)成立．

定理 2 的证明．由条件 1)易知 $h(x)$在 R^p 上一致连续，故由[2]，定理 1 可知

$$P\{\sup_x|h_n(x)-h(x)|>\varepsilon\}\leqslant Cn^{2p}\exp\{-dna^p\} \tag{28}$$

对任意 $\varepsilon^*>0$，令

$$\mathscr{D}(\varepsilon^*)=\{\sup_{x\in S}\sup_y|g_n(x,\ y)-g(x,\ y)|<\varepsilon^*,\ \sup_{x\in S}|h_n(x)-h(x)|<\varepsilon^*\},$$

由引理 4 和(28)式得

$$\begin{aligned}P((\mathscr{D}(\varepsilon^*))^c)&\leqslant P\{\sup_{x\in A}\sup_y|g_n(x,\ y)-g(x,\ y)|>\varepsilon^*\}+P\{\sup_{x\in A}|h_n(x)-h(x)|>\varepsilon^*\}\\&\leqslant Cn^{2(p+q)}\exp\{-dna^pb^q\},\end{aligned}$$

当 $0<\varepsilon^*<\min\left(1,\ \frac{1}{2}\inf\limits_{x\in S}h(x)\right)$ 且 $\mathscr{D}(\varepsilon^*)$发生时，存在常数 M_4，使得

$$\sup_{x\in S}\sup_y|f_n(y|x)-f(y|x)|=\sup_{x\in S}\sup_y\left|\frac{g_n(x,\ y)}{h_n(x)}-\frac{g(x,\ y)}{h(x)}\right|\leqslant M_4\varepsilon^*,$$

故当 $0<\varepsilon<M_4\min\left(1,\ \frac{1}{2}\inf\limits_{x\in S}h(x)\right)$时，有

$$\begin{aligned}P\{\sup_{x\in S}\sup_y|f_n(y|x)-f(y|x)|>\varepsilon\}&\leqslant P((\mathscr{D}(\varepsilon/M_5))^c)\\&\leqslant Cn^{2p+2q}\exp\{-dna^pb^q\},\end{aligned}$$

由(5)式成立，故(3)式成立．定理 2 证毕．

参 考 文 献

[1] Hoeffding, W., Probability inequalities for sums of bounded random variables, J. A. S. A., **58** (1963), 13—30.

[2] Devroye, L. P., Wagner, T. J., *The strong uniform consistency of kernel density estimates*. Multivariate Analysis, 59—77, V. North-Holland Publishing Company, 1980.

DOUBLE KERNEL ESTIMATORS OF CONDITIONAL DENSITY

SUN DONGCHU

(*East China Normal University*)

Let (X, Y), (X_i, Y_i) $i=1, 2, \cdots$ be i.i.d. $R^p \times R^q$-valued random vectors with common joint distribution $G(x, y)$ and joint density $g(x, y)$. Let $h(x)$ be the marginal density of X and let $f(y|x) = g(x, y)/h(x)$ be the conditional density of Y on X. In this paper we propose the following type of conditional density estimators (called double kernel estimators)

$$f_n(y|x) = \sum_{i=1}^{n} K_1\left(\frac{x-X_i}{a_n}\right) K_2\left(\frac{y-Y_i}{b_n}\right) \Big/ \left\{ b_n^q \sum_{j=1}^{n} K_1\left(\frac{x-X_j}{a_n}\right)\right\}$$

where K_1 and K_2 are probability density functions on R^p and R^q respectively, and both a_n and b_n are sequences of small positive numbers. Denote

$$g_n(x, y) = (na_n^p b_n^q)^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_1\left(\frac{x-X_i}{a_n}\right) K_2\left(\frac{y-Y_i}{b_n}\right),$$

$$h_n(x) = (na_n^p)^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_1\left(\frac{x-X_i}{a_n}\right)$$

then $f_n(y|x) = g_n(x, y)/h_n(x)$. If $a_n = b_n$, $g_n(x, y)$ is Rosenblatt estimator of joint density $g(x, y)$. In the paper, we obtain both pointwise and uniform strong consistency of $g_n(x, y)$ and $f_n(y|x)$.