应用概率统计 第十一卷
第三期 1995年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 11, No. 3, Aug. 1995

稳定分量过程象集的一致测度和一致维数

赵 兴 球
(武汉大学, 武汉, 430072)

摘 要

令 $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_N(t))$ 为一 d-维过程, 其中 $X_i(t)$ 为 α_i-阶 d_i-维稳定过程. 设 $0<\alpha_n<\cdots<\alpha_1\le 2$, $d=d_1+\cdots+d_N$. 本文中, 我们获得了, 当 $\alpha_1\le d_1$ 时稳定分量过程 $X(t)$ 关于 Borel 集 E 的象 $X(E)$ 的 Hausdorff 测度和 Packing 测度的一致上界和一致下界, 当 $\alpha_1>d_1$ 时得到了相应测度的一个一致上界. 同时我们给出了一致维数结果.

关键词: 稳定分量过程集, Hausdorff 测度与维数, Packing 测度与维数.
学科分类: 211.62.

§1. 引 言

本文考虑 R^d 中具有如下形式的过程: $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_N(t))$, 其中 $X_i(t)$ 为 R^{d_i} 中指标为 α_i 的严稳定过程, $d=d_1+\cdots+d_N$. 我们的目的是探寻 $X(t)$ 关于有界集 E 的象 $X(E)$ 与 E 的测度性质之间的关系. 对于严稳定过程, Perkins 和 Taylor 已经讨论过这种关系, 参见 [4]. 现在我们叙述一下本文的主要结果. 为此先给出有关定义.

设 Φ 为所有满足下列条件的函数 φ 所成的类:

(1) $\varphi:\ (0,\delta)\to(0,1)$ 单调递增, 右连续, $\varphi(0+)=0$;

(2) 存在常数 C_0, 当 $0<s<\delta/2$ 时 $\varphi(2s)/\varphi(s)\le C_0$.

我们称 Φ 中的函数为测度函数. 给定 $\varphi\in\Phi$, 我们定义关于 R^d 的子集合函数 φ-m, φ-P 如下:

$$\varphi-m(E)=\lim_{\delta\downarrow 0}\inf\left\{\sum\varphi(\mathrm{diam.}(E_i)),\bigcup E_i\supset E,\mathrm{diam.}(E)<\delta\right\},$$

$$\varphi-\mathsf{P}(E)=\lim_{\delta\downarrow 0}\sup\left\{\sum\varphi(2r_i),B(x_i,r_i)\ \text{不相交},\ x_i\in E,r_i<\delta\right\},$$

其中 $B(x,r)$ 表以 x 为心、r 为半径的开球. 称 φ-$m(E)$ 为集合 E 关于 φ 的 Hausdorff 测度. E 的 Hausdorff 维数定义为

$$\dim(E)=\inf\{\alpha\ge 0: s^\alpha-m(E)=0\}=\sup\{\alpha\ge 0: s^\alpha-m(E)=+\infty\}.$$

与 Hausdorff 测度不一样, φ-$\mathsf{P}(\cdot)$ 一般不是 R^d 上的外测度, 而只是 R^d 的所有子集的类上的一个予测度. 我们可以通过下列方法得到 R^d 的一个度量外测度:

$$\varphi-\mathsf{P}(E)=\inf\left\{\sum\varphi-\mathsf{P}(E_i),\bigcup E_i\supset E\right\},$$

本文1993年5月15日收到, 1994年9月17日收到修改稿.

称φ-$\mathsf{P}(E)$ 为集合E 关于φ 的Packing 测度．E 的Packing 维数定义为

$$\mathrm{Dim}(E)=\inf\{\alpha\ge 0: s^{\alpha}-\mathsf{P}(E)=0\}=\sup\{\alpha\ge 0: s^{\alpha}-\mathsf{P}(E)=+\infty\}.$$

定义1.1 设$X_i(t)$ 为$\boldsymbol{R}^{d_i}$ 中指标为α_i 的严稳定过程，$i=1,\cdots,N, N\ge 2$，$d=d_1+\cdots+d_N$，$X_1(t),\cdots,X_N(t)$ 相互独立．令$\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),\cdots,X_N(t))$，则称过程$\boldsymbol{X}(t)$ 为$\boldsymbol{R}^d$ 中稳定分量过程．不妨设$0<\alpha_N<\cdots<\alpha_2<\alpha_1\le 2$．

定理1.1 设$\boldsymbol{X}(t)$ 如定义1.1，则存在常数c 使得$a.s.$ 对所有Borel 集$E\subset[0,\infty)$ 和$h\in\Phi$ 及对

$$\varphi(s)=\begin{cases} h\Big(cs^2\log^{-1}\dfrac{1}{s}\Big), & \text{当}\alpha_1=2,\\ c\log^{-1}\dfrac{1}{s}h\Big(cs^{\alpha_1}\log\dfrac{1}{s}\Big), & \text{当}\alpha_1<2,\end{cases}$$

有

$$\varphi-m(\boldsymbol{X}(E))\le h-m(E).$$

定理1.2 设$\boldsymbol{X}(t)$ 如定义1.1,

(i) 如果$\alpha_1=2$，$M>0,\eta>2$，那么$a.s.$ 对所有Borel 集$A\subset[0,M]$ 和所有$h\in\Phi$ 若令$\varphi(2s)=h\Big(\dfrac{s^2}{\eta\log 1/s}\Big)\in\Phi$，则有

$$\varphi-\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))\le h-\mathsf{P}(A).$$

(ii) 如果$\alpha_1<2$，那么$a.s.$ 对$h\in\Phi$ 及满足$\int_{0+}\dfrac{\varphi(s)}{s}\mathrm{d}s<\infty$ 的$\varphi\in\Phi$ 及每一Borel 集$A\subset[0,M]$，若令$\varphi_1(s)=\varphi(s)\Big(\log\dfrac{1}{s}\Big)^{-1}h\Big(s^{\alpha_1}\log\dfrac{1}{s}\Big)$，则有

$$h-\mathsf{P}(A)<\infty\Longrightarrow\varphi_1-\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))=0.$$

§2. 定理的证明

设$N_r(E)$ 表中心在E 中、半径为r 的不交的开球的最大个数．

引理2.1[4] 设$\varphi,\psi\in\Phi, h(s)=\varphi(s)\psi(s)$ 且$\int_{0+}\dfrac{\psi(s)}{s}\mathrm{d}s<\infty$，则对任何$E$

$$\limsup_{r\downarrow 0}N_r(E)\varphi(2r)<\infty\Longrightarrow h-\mathsf{P}(E)=0.$$

为证定理，还需证一个关键性的复盖引理．

引理2.2 设$\boldsymbol{X}(t)$ 如定义1.1，则对某一个适当的常数C，$a.s.$ $\exists\delta_0(\omega)>0$ 使得对任何区间$J\subset[0,M]$ 且$|J|=\eta\le\delta_0$，$\boldsymbol{X}(J)$ 能被$\Big(C\log\dfrac{1}{\eta}\Big)$ 个直径为$\eta^{1/\alpha_1}\Big(\log\dfrac{1}{\eta}\Big)^{-1/\alpha_1}$ 的开球复盖．

证明 显然只须对每个半二进制立方体$J=[u,v]$ 论证该引理的结论成立．这里$k\in\boldsymbol{N}$，$v-u=2^{-k}$，$u=i2^{-k}$ 或$\Big(i+\dfrac{1}{2}\Big)2^{-k}$，$0\le i<M2^{-k}$．这种$J$ 的个数最多为$2M2^k$．对

于任何一个固定的$c>0$, 我们称J是坏的, 如果$X(J)$不能被ck个直径为$k^{-1/\alpha_1}2^{-k/\alpha_1}$的开球所复盖. 定义停时序列

$$\tau_0=u,\qquad \tau_{i+1}=\inf\left\{t>\tau_i:\ |X(t)-X(\tau_i)|>k^{-1/\alpha_1}2^{-k/\alpha_1}\right\},$$

则

$$\mathsf{P}(\{J\text{是坏的}\})\le \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{ck-1}(\tau_{i+1}-\tau_i)<2^{-k}\right\}=\mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m_k}2^k(\tau_{i+1}-\tau_i)<1\right\},$$

其中$m_k=ck-1$. 因为

$$\begin{aligned}
2^k(\tau_{i+1}-\tau_i)&\overset{D}{=}\inf\left\{2^kt>0:\ |X(t)|>k^{-1/\alpha_1}2^{-k/\alpha_1}\right\}\\
&\ge k^{-1}\inf\left\{k2^kt>0:\ \sup_{1\le j\le N}|X_j(t)|>\frac{1}{N}k^{-1/\alpha_1}2^{-k/\alpha_1}\right\}\\
&\overset{D}{=}k^{-1}\inf\left\{k2^kt>0:\ \sup_{1\le j\le N}\left|k^{-1/\alpha_j}2^{-k/\alpha_j}X_j(k2^kt)\right|>\frac{1}{N}k^{-1/\alpha_1}2^{-k/\alpha_1}\right\}\\
&\ge k^{-1}\inf\left\{k2^kt>0:\ \sup_{1\le j\le N}|X_j(k2^kt)|>\frac{1}{N}\right\}\\
&=k^{-1}\inf\left\{k2^kt>0:\ \sup_{1\le j\le N}|X_j(t)|>\frac{1}{N}\right\}\\
&=k^{-1}\tau,\qquad (X\overset{D}{=}Y\ \text{表}X\text{与}Y\ \text{同分布})
\end{aligned}$$

这里$\tau=\inf\left\{t>0:\ \sup\limits_{1\le j\le N}|X_j(t)|>\frac{1}{N}\right\}$, $\tau_{i+1}-\tau_i$独立同分布, 所以

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\{J\text{是坏的}\})&\le \mathsf{P}\left\{\exp\left(-\ell\sum_{i=1}^{m_k}2^k(\tau_{i+1}-\tau_i)\right)>\exp(-\ell)\right\}\qquad(\forall\ell>0)\\
&\le e^{\ell}\mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{m_k}\exp(-\ell2^k(\tau_{i+1}-\tau_i))\right)\\
&=e^{\ell}\prod_{i=1}^{m_k}\mathsf{E}(\exp(-\ell2^k(\tau_{i+1}-\tau_i)))\\
&=e^{\ell}\Big[\mathsf{E}(\exp(-\ell2^k(\tau_{i+1}-\tau_i)))\Big]^{m_k}.
\end{aligned}$$

现在我们选择$\ell=c_1k$, 其中c_1满足: $\mathsf{E}\left(e^{-c_1\tau}\right)<\frac{1}{2e}$. 再选择$c=1+c_1$, 则有

$$\mathsf{P}(\{J\text{是坏的}\})\le e^{c_1k}\left(\frac{1}{2e}\right)^{c_1k+k-1}<2e\cdot2^{-k}\cdot e^{-k}.$$

因此

$$\mathsf{P}\{\text{至少有一个}J\text{是坏的}\}<4eM2^{-k}.$$

于是据 Borel–Cantelli 引理知$a.s.\exists k_0=k_0(\omega)$使当$k\ge k_0$, 所有边长为$2^{-k}$的半二进制立方体都是好的. 至此完成了该引理的证明.

推论 2.1 设$X(t)$如引理2.2, 则存在常数c, 使得$a.s.\ \exists\delta_0(\omega))>0$满足下列性质: 不存在$J\subset[0,M]$: $|J|=\ell\le\delta_0$, 使得 $X(J)$含有相互距离至少为$\left(\ell\Big/\log\frac{1}{\ell}\right)^{1/\alpha_1}$的点超过$\left(c\log\frac{1}{\ell}\right)$个.

定理1.1的证明 (i) 当 $\alpha_1=2$, 则由 Brown 运动 X_1 具有连续 Lévy 模和 [3] 中的结果

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le M}|\boldsymbol{X}_0(t+s)-\boldsymbol{X}_0(t)|>s^{1/\beta}\Big\}\le s^{1-\alpha_2/\beta},\qquad \forall\beta>\alpha_2,$$

其中 $\boldsymbol{X}_0=(X_2,\cdots,X_N)$, 可知 $a.s.$ $\exists\delta_M=\delta_M(\omega)>0$ 使

$$0\le t\le M,\ 0<s<\delta_M\Longrightarrow|\boldsymbol{X}(t+s)-\boldsymbol{X}(t)|\le c\Big(s\log\frac{1}{s}\Big)^{1/2},$$

从而易得 $a.s.$ $\forall$ Borel 集 $E\subset[0,\infty]$, $\forall h\in\Phi$, $\varphi\text{-}m(\boldsymbol{X}(E))\le h\text{-}m(E)$.

(ii) 当 $\alpha_1<2$, 由引理2.2 知对 $a.s.\omega, M\in\boldsymbol{N}$ 存在 $\delta_M(\omega)>0$ 使得当 $I\subset[0,M]$ 且 $|I|\delta_M(\omega)$ 时, $\boldsymbol{X}(I)$ 能被 $\Big(c_1\log\frac{1}{|I|}\Big)$ 个直径为 $\Big(|I|^{1/\alpha_1}\Big(\log\frac{1}{|I|}\Big)^{-1/\alpha_1}\Big)$ 的开球复盖. $\forall\delta>0$, Borel 集 $E\subset[0,M]$, $h\in\Phi$, 存在 $\{J_i:\ i\in\boldsymbol{N}\}$ 且 $|J_i|\le\delta_M(\omega)\wedge\delta$ 使得 $\sum_{i=1}^{\infty}h(|J_i|)\le h\text{-}m(E)+\delta$. 因此 $\boldsymbol{X}(J_i)\subset\bigcup_{k=1}^{N_i}B_k^i$, 其中 $N_i\le c_1\log\frac{1}{|J_i|}$, B_k^i 是直径为 $|J_i|^{1/\alpha_1}\Big(\log\frac{1}{|J_i|}\Big)^{-1/\alpha_1}$ 的开球. 从而

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N_i}\varphi\Big(c\Big(\log\frac{1}{|J_i|}\Big)^{-1/\alpha_1}|J_i|^{1/\alpha_1}\Big)\\
&\quad\le\sum_{i=1}^{\infty}c_1\Big(\log\frac{1}{|J_i|}\Big)c\Big(\alpha_1^{-1}\log\frac{1}{|J_i|}+\alpha_1^{-1}\log\log\frac{1}{|J_i|}\Big)^{-1}\\
&\qquad\cdot h\Big(c\Big(\log\frac{1}{|J_i|}\Big)^{-1}|J_i|\Big(\alpha_1^{-1}\log\frac{1}{|J_i|}+\alpha_1^{-1}\log\log\frac{1}{|J_i|}\Big)\Big)\\
&\quad\le\sum_{i=1}^{\infty}c_1\cdot c\cdot2\alpha_1^{-1}h(c\cdot2\alpha_1^{-1}|J_i|)\le\sum_{i=1}^{\infty}h(|J_i|)\le h-m(E)+\delta.\end{aligned}$$

上式中选取 c 充分小即可. 令 $\delta\downarrow0$ 得

$$\varphi-m(\boldsymbol{X}(E))\le h-m(E).$$

对 Borel 集 $E\subset[0,\infty)$, 利用单调收敛定理即可证之.

定理1.2的证明. (i) 只需证: 对所有 Borel 集 $A\subset[0,M]$ 有

$$\varphi-\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))\le h-\mathsf{P}(A).\tag{2.1}$$

选 $\eta>\eta'>2$, 则由 Brown 运动 X_1 具有连续 Lévy 模及

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le M}|\boldsymbol{X}_0(t+s)-\boldsymbol{X}_0(t)|>s^{1/\beta}\Big\}\le cs^{1-\alpha_2/\beta},\qquad\forall\beta>\alpha_2,$$

知 $a.s.$ $\exists\delta_0=\delta_0(\omega)>0$ 使得

$$0\le t\le M,\ 0<s<\delta_0\Longrightarrow|\boldsymbol{X}(t+s)-\boldsymbol{X}(t)|\le\Big(\eta's\log\frac{1}{s}\Big)^{1/2}.\tag{2.2}$$

若 $\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))=0$, (2.1) 显然成立. 先设 $0<\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))<\infty$. $\forall\varepsilon$, $q_0=\Big(\delta_0\log\frac{1}{\delta_0}\Big)^{1/2}$ 和任何 $q:\ 0<q\le q_0$, 则有有限个开球 $B(x_i,q_i)$ 填充 $\boldsymbol{X}(A)$, 其中 $q_i\le q, x_i=\boldsymbol{X}(t_i)$, $\le t_0<t_i<t_{i+1}\le M$, $t_i\in A$, 且 $\sum\varphi(2q_i)\ge(1-\varepsilon)\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A))$. 现设 J_i 为中心在

t_i、长度为 $2r_i = \dfrac{q_i^2}{\eta\log 1/q_i}$ 的区间. 因为 $\left(\eta s\log\dfrac{1}{s}\right)^{1/2}$ 和 $s^2\left(2\eta\log\dfrac{1}{s}\right)^{-1}$ 互为渐近逆, 且 $s^2\left(\log\dfrac{1}{s}\right)^{-1}$ 是凸函数, 而 (2.2) 保证 J_i 不相交, 这些不相交的小区间构成 A 的一个填充,

$$\sum h(2r_i) = \sum h\Big(\frac{q_i^2}{\eta\log 1/q_i}\Big) = \sum\varphi(2q_i) \geq (1-e)\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A)),$$

所以

$$h\text{-}\mathsf{P}(A) \geq (1-\varepsilon)\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A)).$$

故由 ε 的任意性知 (2.1) 成立. 类似可证: 当 $\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A)) = +\infty$ 时, 必有 $h\text{-}\mathsf{P}(A) = +\infty$.

(ii) 同样只需证:

$$h\text{-}\mathsf{P}(A) < \infty \Longrightarrow \varphi_1\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A)) = 0.$$

假设 A 使得 $\varphi_1\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(A)) > 0$. 由引理 2.1 有

$$\limsup_{r\downarrow 0} M_r(\boldsymbol{X}(A))\varphi_2(r) = +\infty,$$

其中 $M_r(\boldsymbol{X}(A))$ 表示为中心在 $X(A)$ 中半径为 r 的不交开球的最大个数, $\varphi_2(s) = \varphi_1(s)/\varphi(s)$. 令 $r_k = 2^{-k/\alpha_1}(\log 2^{k/\alpha_1})^{1/\alpha_1}$, 则 $r_k/r_{k+1} \sim 2^{1/\alpha_1}$, 再利用 $\varphi_2(2s)/\varphi_2(s) \leq C$ 得

$$\limsup_{\substack{r = r_k \\ k\to\infty}} M_r(\boldsymbol{X}(A))\varphi_2(r) = +\infty.$$

对每一充分大 p, 我们能找到序列 $k_i \to \infty$ 使得

$$M_{r_{k_i}}(\boldsymbol{X}(A)) > \frac{p}{\varphi_2(r_{k_i})}.$$

如果 $I \supset [0, M]$ 且 $|I| = 2^{-k_i}$, 推论 2.1 告诉我们中心在 $\boldsymbol{X}(I)$ 中、半径为 r_{k_i} 的不交开球个数不超过 ck_i. 因此与 A 相交的二进制区间 $[j2^{-k_i}, (j+1)2^{-k_i}]$ 的个数 $\geq \dfrac{p\varphi_2^{-1}(r_{k_i})}{ck_i} \geq \dfrac{cp}{h(2^{-k_i})}$, 这给出 $h\text{-}\mathsf{P}(A) \geq cp$. 由 p 的任意性知 $h\text{-}\mathsf{P}(A) = +\infty$. 从而得证 (2.3).

注: 利用关系 $\varphi\text{-}m(\boldsymbol{X}(E)) \geq \varphi\text{-}m(X_1(E))$ 与 $\varphi\text{-}\mathsf{P}(\boldsymbol{X}(E)) \geq \varphi\text{-}\mathsf{P}(X_1(E))$ 以及文献 [4] 中的结果, 立即得出关于 $\boldsymbol{X}(t)$ 的象集的测度的一致下界结果, 进而有下列一致维数结果:

当 $\alpha_1 \leq d_1$, *a.s.* 对所有 Borel 集 $E \subset [0, \infty)$,

$$\dim\boldsymbol{X}(E) = \alpha_1\dim E, \qquad \mathrm{Dim}\boldsymbol{X}(E) = \alpha_1\mathrm{Dim}E.$$

本文是在导师胡迪鹤教授的指导下完成的, 特在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Hendricks, W. J., Hausdorff dimension in a process with stable components— an interesting counter-example. Ann. Math. Statist. 43(1972), 690–694.
[2] Hendricks, W. J., A dimension theorem for sample functions of processes with stable components. Ann. Prob. 1(1973), 849–853.

[3] Hendricks, W. J., Lower envelopes near zero and infinity for processes with stable components. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **16**(1970), 261–278.

[4] Perkins, E. A. and Taylor, S. J., Uniform measure results for the image of subsets under Brownian motion. Prob. Th. Rel. Fields **76**(1987), 257–289.

Uniform Measure and Uniform Dimension Results for the Image of Subset under Processes with Stable Components

ZHAO XINGQIU

(*Wuhan University, Wuhan*)

Let $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_N(t))$ be a d-dimensional process, where $X_i(t)$ is a α_i-order stable d_i-dimensional process. Assume $0 < \alpha_N < \cdots < \alpha_1 \le 2$, $d = d_1 + \cdots + d_N$. In this paper, when $\alpha_1 \le d_1$, we obtain the uniform bounds on the Hausdorff and packing measure of the image $\boldsymbol{X}(E)$ of a Borel set E under a process $\boldsymbol{X}(t)$ with stable components. When $\alpha_1 > d_1$, the uniform upper is obtained. Uniform dimension theorem is given.