应用概率统计 第五卷
第三期 1989 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 5. No. 3. Aug. 1989

椭球等高分布族下的非中心 Cochran 定理

张 帼 奋
(浙江大学)

摘 要

本文在椭球等高分布假定下，讨论了二次型 $X'AX$(A 为对称阵)的非中心 Cochran 定理.

主要结果如下:

若 $X\sim EC_n(\mu, I_n; g)$, $g(x)>0$ 为 x 的连续函数，且 X 有有限的 $2n$ 阶矩. A_i, $i=1, 2, \cdots, m$ 为 $n\times n$ 对称阵. $A=\Sigma A_i$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 互不相同且非零. 考虑下面的条件:

(a) $X'A_iX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j y_{ij}$, $(y_{i1}, \cdots, y_{ik})'\sim G\chi^2(n_{i1}, \cdots, n_{ik}; \delta_{i1}^2, \cdots, \delta_{ik}^2; g)$ $j=1, \cdots, m$.

(b) $(X'A_1X, \cdots, X'A_mX)\overset{d}{=}(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j z_j, \cdots, \sum_{j=(m-1)k+1}^{mk}\lambda_{j-(m-1)k}z_j)$

$(z_1, \cdots, z_{mk})'\sim G\chi^2(n_{11}, \cdots, n_{1k}, n_{21}, \cdots, n_{mk}; \delta_{11}^2, \cdots\delta_{1k}^2, \delta_{21}^2, \cdots, \delta_{mk}^2; g)$

(c) $X'AX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j y_j$, $(y_1, \cdots, y_k)'\sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, \delta_k^2; g)$

(d) $r(A)=\Sigma r(A_i)=\Sigma\Sigma r(A_iE_j)$, $A=\Sigma\lambda_jE_j$, $E_j^2=E_j$, $E_jE_{j'}=0$, $j\neq j'=1, \cdots, k$,

(e) k 个等式 $n_j=\Sigma n_{ij}$ 中至少有 $k-1$ 个成立. 则

(I) $(a), (b)\Rightarrow(c), (d), (e)$,

(II) $(a), (c), (e)\Rightarrow(b), (d)$,

(III) $(b), (c)\Rightarrow(a), (d), (e)$,

(IV) $(c), (d)\Rightarrow(a), (b), (c)$.

Cochran 定理是方差分析的理论基础，是二次型理论的一部分. 因此，自从 1934 年 Cochran 定理问世以来，有关这方面的理论研究一直在进行着，它的内容在不断地加深和更新. 迄今为止，对于来自正态总体的样本，非中心 Cochran 定理已得到了较为完善的解决. 随着椭球等高分布族理论的发展，有不少学者开始探讨在椭球等高分布族下的Cochran 定理. 关于 Cochran 定理中的矩阵，人们一般见到的都是幂等或三次幂等的对称阵. 而 Khatri (1982) 在正态分布条件下给出了矩阵只要求是对称阵这样的 Cochran 定理. 在此基础上，方开泰、吴月华[1]考虑了在椭球等高分布假定下的中心 Cochran 定理，其中的矩阵也只要求是对称阵. 本文在矩阵仍为对称阵的条件下，把结论推广到椭球等高分布族的非中心 Cochran 定理，从而也推广了范剑青[2]的结果，因为他考虑的矩阵是幂等对称阵.

在本文中，A', $r(A)$ 分别表示矩阵 A 的转置及 A 的秩. I_n 记 n 阶单位阵.

若 X, Y 是随机向量，$X\overset{d}{=}Y$ 表示 X 与 Y 同分布. $X\sim F(x)$ 表示 X 的分布函数为 $F(x)$.

本文 1987 年 5 月 4 日收到.

"≙"表示"定义为，记为".

设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_m\end{pmatrix}\begin{matrix}n_1\\ \vdots\\ n_m\end{matrix}\sim S_n(\phi)$，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{pmatrix}\begin{matrix}n_1\\ \vdots\\ n_m\end{matrix}$. 见[3].

[2]定义了 $\begin{pmatrix}(X_1+\mu_1)'(X_1+\mu_1)\\ \vdots\\ (X_m+\mu_m)'(X_m+\mu_m)\end{pmatrix}\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_m;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_m^2;\ \phi)$.

这里 $\delta_i^2=\mu_i'\mu_i$. $(i=1,\ \cdots,\ m)$. 由球对称分布关于正交变换的不变性，可以不妨设 $\mu_i=(\delta_i,\ 0,\ \cdots,\ 0)'$，$(i=1,\ \cdots,\ m)$，而不影响 $\begin{pmatrix}(X_1+\mu_1)'(X_1+\mu_1)\\ \vdots\\ (X_m+\mu_m)'(X_m+\mu_m)\end{pmatrix}$ 的分布.

特别当 $m=1$ 时，$(X_1+\mu_1)'(X_1+\mu_1)$ 的分布称为广义非中心 χ^2-分布，记为 $(X_1+\mu_1)'(X_1+\mu_1)\sim G\chi^2_{n_1}(\delta_1^2;\ \phi)$.

[2]还给出了当 $X\sim S_n(\phi)$，且有密度 $g(X'X)$ 时，$G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_m;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_m^2;\ \phi)$ 的概率密度.（这时记为 $G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_m;\ \delta_1^2\cdots,\ \delta_m^2;\ g)$）.

下面是[2]的一些结果.

结果一. 若 $(y_1,\ \cdots,\ y_m)'\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_m;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_m^2;\ \phi)$

则
$$\sum_{i=1}^{p}y_i\sim G\chi^2_{n_1+\cdots+n_p}(\delta_1^2+\cdots+\delta_p^2;\ \phi),\ (p\leqslant m).$$

结果二. 设 $X\sim EC_n(\mu,\ I_n,\ \phi)$. A 是 $n\times n$ 阶对称阵，则 $X'AX$ 的修正的矩母函数(如果存在)为

$$E[\exp(-tX'AX)]=C_nE_R\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\frac{y}{2}}\prod_{j=1}^{n}(y+2t\lambda_jR^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\exp\{-t\lambda_j\delta_j^2y/(y+2\lambda_jR^2t)\}dy\quad(t>0).$$

其中 $C_n=2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/2\pi i$，$\Gamma'A\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$，$\Gamma$ 为正交阵，$\delta=(\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n)'=\Gamma'\mu$. $\phi\in\Phi_n\leftrightarrow R$. E_R 表示对随机变量 R 求数学期望，积分是沿任一直线 $y=a+is$，$R_ey=a>0$ 上关于 ds 求积的.

为讨论非中心 Cochran 定理，下面我们先给出二个引理.

引理1 若 $X\sim EC_n(\mu,\ I_n,\ g)$，其中 $g(x)>0$ 是 x 的连续函数，且 X 有有限的 $2n$ 阶矩存在. A 为 $n\times n$ 阶对称阵，则

$$X'AX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}V_jy_j,\ (y_1,\ \cdots,\ y_k)'\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_k;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_k^2;\ g),$$

n_j，$1\leqslant j\leqslant k$ 是正整数，$\sum_{j=1}^{k}n_j\leqslant n$，$V_j$，$1\leqslant j\leqslant k$ 为互不相同且非零值的充要条件是：V_j，$1\leqslant j\leqslant k$ 是 A 的互不相同的非零特征根，且 V_j 的重数为 n_j，$\sum_{j=1}^{k}n_j=r(A)$，$\delta_j^2=\mu'\Gamma'\begin{pmatrix}0&&0\\&I_{n_j}&\\0&&0\end{pmatrix}\Gamma\mu$，其中，$\Gamma$ 是使 $\Gamma A\Gamma'=\begin{pmatrix}V_1I_{n_1}&&0\\&\ddots&\\0&&V_kI_{n_k}\end{pmatrix}$ 成立的任一正交阵.

这里，$$\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & I_{n_j} & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0\\ & & & & & & & \ddots\\ 0 & & & & & & & & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} n_1+n_{j-1}+1\\ \\ n_1+\cdots+n_j\end{matrix}\triangleq\begin{pmatrix}0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0\end{pmatrix}\quad j=1,\cdots,k.$$

证明 1° 先证：若有正交阵 Γ, Γ_1, 使得

$$\Gamma A\Gamma'=\Gamma_1 A\Gamma_1'=\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ 0 & & V_kI_{n_k} & \\ & & & 0\end{pmatrix}(*),$$

则 $$\Gamma'\begin{pmatrix}0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0\end{pmatrix}\Gamma=\Gamma_1'\begin{pmatrix}0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0\end{pmatrix}\Gamma_1,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

事实上，由(*)知

$$\Gamma'\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\Gamma=\Gamma_1'\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\Gamma_1,$$

即 $$\Gamma_1\Gamma'\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\Gamma_1\Gamma',$$

令 $Q=\Gamma_1\Gamma'$, 则 Q 为正交阵，将 Q 按$\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$进行分块，即

$$Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1,k+1}\\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2,k+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Q_{k+1,1}, & Q_{k+1,2} & \cdots & Q_{k+1,k+1}\end{pmatrix}$$

由 $$Q\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1I_{n_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}Q,$$

即得 $$\begin{pmatrix}V_1Q_{11} & V_2Q_{12} & \cdots & V_kQ_{1k} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ V_1Q_{k,1} & V_2Q_{k,2} & \cdots & V_kQ_{kk} & 0\\ V_1Q_{k+1,1} & V_2Q_{k+1,2} & \cdots & V_kQ_{k+1,k} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1Q_{11} & V_1Q_{12} & \cdots & V_1Q_{1k} & V_1Q_{1,k+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ V_kQ_{k1} & V_kQ_{k,2} & \cdots & V_kQ_{kk} & V_kQ_{k,k+1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}(**)$$

因为 V_i 互不相同且非零．($i=1,\cdots,k$) 所以，(**)成立的充要条件为 $Q_{ij}=0$, $i\neq j=1,\cdots,k,k+1$.

即 $$Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & Q_{kk} & \\ 0 & & & Q_{k+1,k+1}\end{pmatrix}$$

由于 Q 是正交阵，因此 $Q'_{ii}Q_{ii}=I_{n_i}$, $i=1, \cdots, k, k+1$.

即

$$\Gamma'\begin{pmatrix} V_1I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\Gamma=\Gamma'_1\begin{pmatrix} V_1I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\Gamma_1$$

的充要条件是，存在形如

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & Q_{kk} & \\ 0 & & & Q_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

的正交阵，其中 Q_{ii} 与 I_{n_i} 同阶，$i=1, \cdots, k$. $Q_{k+1,k+1}$ 为 $n-\sum_{i=1}^{k}n_i$ 阶，使得 $\Gamma_1=Q\Gamma$.

由于

$$Q'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & Q'_{jj}Q_{jj} & \\ & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，

$$\Gamma'_1\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma_1=\Gamma'Q'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}Q\Gamma=\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma, \quad j=1, \cdots, k.$$

于是便知，无论使

$$\Gamma A\Gamma'=\begin{pmatrix} V_1I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

成立的正交阵 Γ 是什么，得到的

$$\delta_j^2=\mu'\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma\mu$$

总是一样的.

2° 充分性. 只要证：对 $X\sim EC_n(\mu, I_n, \phi)$. $A=A'$.

$$\Gamma A\Gamma'=\begin{pmatrix} V_1I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

Γ 为正交阵. V_j, $1\leqslant j\leqslant k$ 是 A 的互不相同的非零特征根.

$$\delta_j^2=\mu'\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma\mu, \quad 1\leqslant j\leqslant k.$$

则 $$X'AX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}V_jy_j. \quad (y_1, \cdots, y_k)'\sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, \delta_k^2; \phi).$$

事实上，若

$$X\sim EC_n(\mu, I_n, \phi),\ X'AX=X'\Gamma'\begin{pmatrix} V_1I_{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & V_kI_{n_k} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\Gamma X.$$

令 $Z=\Gamma X$, 则 $Z\sim EC_n(\Gamma\mu, I_n, \phi)$.

记
$$Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \\ n-\Sigma n_j \end{matrix}$$

则
$$X'AX \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{k} V_j z_j' z_j.$$

$\because$ $Z \sim EC_n(\Gamma\mu, I_n, \phi)$，所以$\begin{pmatrix} z_1'z_1 \\ \vdots \\ z_k'z_k \end{pmatrix} \sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, , \delta_k^2; \phi)$

即
$$X'AX \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{k} V_j y_j. \quad (y_1, \cdots, y_k)' \sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, \delta_k^2; \phi).$$

3° 必要性．即证：若 $X \sim EC_n(\mu, I_n, g)$．其中 $g(x) > 0$ 是连续函数．X 有有限的 $2n$ 阶矩存在．A 为 $n \times n$ 阶对称阵．则由

$$X'AX \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{k} V_j y_j, \ (y_1, \cdots, y_k)' \sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, \delta_k^2; g).$$

n_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ 是正整数，$\sum_{j=1}^{k} n_j \leqslant n$．$V_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$ 是互不相同且非零的，可推知 V_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ 是 A 的互不相同的非零特征根，且 V_j 的重数为 n_j，$\sum_{j=1}^{k} n_j = r(A)$，

$$\delta_j^2 = \mu'\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma\mu.$$

Γ 意义同前面所述．

事实上，因为 A 为对称阵，所以存在正交阵 P，使得

$$PAP' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_l I_{m_l} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 是 A 的互不相同的非零特征根，且 λ_j 的重数为 m_j．即

$$r(A) = \sum_{j=1}^{l} m_j.$$

令 $Z = PX$，则 $Z \sim EC_n(P\mu, I_n, g)$，

记
$$\eta = P\mu = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

则
$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_l \\ Z_{l+1} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_l \\ n-\Sigma m_l \end{matrix} \stackrel{d}{=} \eta + Z^*$$

$$Z^* = \begin{pmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{pmatrix} \sim EC_n(0, I_n, g).$$

于是 $$X'AX=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j Z_j'Z_j \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{k} V_j y_j.$$

因为 $$(y_1, \cdots, y_k)' \sim G\chi^2(n_1, \cdots, n_k; \delta_1^2, \cdots, \delta_k^2; g)$$

且 $$\sum_{j=1}^{k} n_j \leqslant n,$$

所以 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} (z_1^*+\delta_1)^2+z_2^{*2}+\cdots+z_{n_1}^{*2} \\ \vdots \\ (z_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^*+\delta_k)^2+z_{n_1+\cdots+n_{k-1}+2}^{*2}+\cdots+z_{n_1+\cdots+n_k}^{*2} \end{pmatrix}$$

即 $$\lambda_1(z_1^*+\eta_1)^2+\cdots+\lambda_1(z_{m_1}^*+\eta_{m_1})^2+\lambda_2(z_{m_1+1}^*+\eta_{m_1+1})^2+\cdots+\lambda_l(z_{m_1+\cdots+m_l}^*+\eta_{m_1+\cdots+m_l})^2$$
$$\overset{d}{=} V_1(z_1^*+\delta_1)^2+V_1 z_2^{*2}+\cdots+V_1 z_{n_1}^{*2}+V_2(z_{n_1+1}^*+\delta_2)^2+V_2 z_{n_1+2}^{*2}+\cdots$$
$$+V_k(z_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^*+\delta_k)^2+V_k z_{n_1+\cdots+n_{k-1}+}^{*2}+\cdots+V_k z_{n_1+\cdots+n_k}^{*2} \tag{A}$$

将 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 及 $V_1, \cdots, V_k$ 按其重数写成 $\overbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}^{m_1}, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$; $\overbrace{V_1, \cdots, V_1}^{n_1}, V_2, \cdots, V_k$, 并记成 $p_1, \cdots, p_r$ 及 $q_1, \cdots, q_r$.

下面证明 $p_1, \cdots, p_r$ 即为 $q_1 \cdots, q_r$. 于是将 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 重排后可得 $\lambda_j=V_j$, $m_j=n_j$, $j=1, \cdots, k$.

事实上, 由(A)式, 利用结果二得

$$C_n E_R\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{n-r}{2}} \sum_{j=1}^{r}(y+2tp_jR^2)\exp\{-tp_j\eta_z^2 y/(y+2p_jR^2t)\}dy$$
$$=C_n E_R\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{n-r}{2}}\left[\prod_{j=1}^{r}(y+2tq_jR^2)\right]\cdot\prod_{j=1}^{k}\exp\{-tV_j\delta_j^2 y/(y+2V_jR^2t)\}dy$$

由上式 $a>0$ 的任意性, 作变换

$$y=\frac{t}{u}z, \ (t>0, \ u>0, \text{为独立变量})\text{得}$$

$$E_R\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{t}{2u}z} z^{-\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r}(z+2up_jR^2)\exp\{-tp_j\eta_j^2 z/(z+2p_jR^2u)\}dz$$
$$=E_R\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\frac{t}{2u}z} z^{-\frac{n-r}{2}}\left[\prod_{j=1}^{r}(z+2uq_jR^2)\right]\prod_{j=1}^{k}\exp\{-tV_j\delta_j^2 z/(z+2V_jR^2u)\}dz$$

固定 u, 取 $a=1$, 令 $t\to0$, 由 Lebesque 控制收敛定理得

$$E_R\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} z^{-\frac{n-r}{2}}\prod_{j=1}^{r}(z+2p_jR^2u)^{-\frac{1}{2}}dz=E_R\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} z^{-\frac{n-r}{2}}\prod_{j=1}^{r}(z+2q_jR^2u)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

由于 X 有 $2n$ 阶矩, 从而随机变量 R 有 $2n$ 阶矩, 上式两边关于 u 求 r 次导数, 不妨设 $r\geqslant s$ 并令 $u\to0$, 经整理后可得:

$$\sum_{j=1}^{r} p_j^i=\sum_{j=1}^{r} q_j^i, \quad i=1, \cdots, r.$$

由[6]知 $p_1, \cdots, p_r$ 即为 $q_1, \cdots, q_r$, 因此经重排后, 有 $\lambda_j=V_j$, $m_j=n_j$, $j=1, \cdots, k$. 即有正交阵 Γ, 使

$$\Gamma A\Gamma'=\begin{pmatrix} V_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & V_k I_{n_k} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $$X'AX \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{k} V_j z_j' z_j$$

其中
$$Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \\ n-\Sigma n_j \end{matrix} \sim EC_n(\Gamma\mu,\ I_n,\ g)$$

因此
$$\begin{pmatrix} z_1'z_1 \\ \vdots \\ z_k'z_k \end{pmatrix} \sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_k;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_k^2;\ g)$$

$$\delta_j^2=\mu'\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_j} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma\mu, \quad j=1,\ \cdots,\ k.$$

于是引理 1 得证.

引理 2 若 $X\sim EC_n(\mu,\ I_n,\ g)$, $g(X)>0$ 为 X 的连续函数, 且 X 有有限的 $2n$ 阶矩. $A_i, i=1,\ \cdots,\ m$ 为 $n\times n$ 阶对称阵, 则

$$(X'A_1X,\ \cdots,\ X'A_mX)\overset{d}{=}\left(\sum_{j=1}^{k_1}\lambda_j^{(1)}z_j,\ \cdots,\ \sum_{j=k_1+\cdots+k_{m-1}+1}^{k_1+\cdots+k_m}\lambda_{j-(k_1+\cdots+k_{m-1})}^{(m)}z_j\right)$$

$$(z_1,\ \cdots,\ z_{k_1+\cdots+k_m})'\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_{k_1+\cdots+k_m};\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_{k_1+\cdots+k_m}^2;\ g)$$

$\lambda_j^{(i)}$, $1\leqslant j\leqslant k_i$, $1\leqslant i\leqslant m$, 都非零的充分必要条件是: $A_iA_{i'}=0$, $i\neq i'=1,\ \cdots,\ m$. $\lambda_j^{(i)}(1\leqslant j\leqslant k_i)$ 是 A_i的非零特征根.

$$\delta_i^2=\mu'\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_i} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma\mu.$$

其中 Γ 是使 A_i, $i=1,\ \cdots,\ m$ 同时对角化且

$$\Gamma A_i\Gamma'=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \lambda_1^{(i)}I_{n_{k_1+\cdots+j_{i-1}+1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{k_i}^{(i)}I_{n_{k_1+\cdots+k_i}} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad i=1,\ \cdots,\ m.$$

成立的任一正交阵.

证明 同引理 1 的 1° 可证: 若有 Γ, Γ_1, 使得 A_i, $i=1,\ \cdots,\ m$ 同时对角化, 且 $\Gamma A_i\Gamma'=\Gamma_1A_i\Gamma_1'$, $i=1,\ \cdots,\ m$. 则

$$\Gamma'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_i} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma=\Gamma_1'\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{n_i} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\Gamma_1, \quad i=1,\ \cdots,\ k_1+\cdots+k_m.$$

充分性: 由 $A_iA_j=A_jA_i=0$ 知, 存在正交阵 Γ, 使 A_i, $i=1,\ \cdots,\ k$ 同时对角化, 且可使

$$\Gamma A_i\Gamma'=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1^{(i)}I_{n_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{k_i}^{(i)}I_{n_{k_1+\cdots+k_i}} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_j^{(i)}$, $1\leqslant j\leqslant k_i$ 是 A_i 的互不相同的非零特征根.

记 $Y=\Gamma X$, 则 $Y\sim EC_n(\Gamma\mu,\ I_n,\ g)$

将 Y 剖分为

$$Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{k_1} \\ Y_{k_1+1} \\ \vdots \\ Y_{k_1+\cdots+k_m} \\ Y^* \end{pmatrix}\begin{array}{l} n_1 \\ \vdots \\ n_{k_1} \\ n_{k_1+1} \\ \vdots \\ n_{k_1+\cdots+k_m} \\ n-\Sigma n_j \end{array}$$

$V=\Gamma\mu$ 按 Y 同样剖分.

则 $(X'A_1X,\ X,\ \cdots,\ X'A_mX)\overset{d}{=}\Big(\sum_{j=1}^{k_1}\lambda_j^{(1)}Y'_jY_j\cdots\sum_{j=k_1+\cdots+k_{m-1}+1}^{k_1+\cdots+k_m}\lambda^{(m)}_{j-(k_1+\cdots+k_{m-1})}Y'_sY_s\Big)$

$(Y'_1Y_1,\ \cdots,\ Y'_{k_1+\cdots+k_m}Y_{k_1+\cdots+k_m})'\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_{k_1+\cdots+k_m};\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_m};\ g)$.

必要性: 由[3]及结果一得:

$$X'A_iX\overset{d}{=}\sum_{j=k_1+\cdots+k_{i-1}+1}^{k_1+\cdots+k_i}\lambda^{(i)}_{j-(k_1+\cdots+k_{i-1})}z_j,$$

$(z_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ z_{k_1+\cdots+k_i})'\sim G\chi^2(n_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ n_{k_1+\cdots+k_i};\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_i};\ g)\quad i=1,\ \cdots,\ m.$

$$X'(A_i+A_l)X\overset{d}{=}\sum_{j=k_1+\cdots+k_{i-1}+1}^{k_1+\cdots+k_i}\lambda^{(i)}_{j-(k_1+\cdots+k_{i-1})}z_j+\sum_{j=k_1k+\cdots+k_{l-1}+1}^{k_1+\cdots+k_l}\lambda^{(l)}_{j-(k+\cdots+k_{l-1})}z_j.$$

$$(z_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ z_{k_1+\cdots+k_i},\ z_{k_1+\cdots+k_{l-1}+1},\ \cdots,\ z_{k_1+\cdots+k_l})'$$
$$\sim G\chi^2(n_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ n_{k_1+\cdots+k_i},\ n_{k_1+\cdots+k_{l-1}+1},\ \cdots,\ n_{k_1+\cdots+k_l};$$
$$\delta^2_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1},\ \cdots,\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_i},\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_{l-1}+1},\ \cdots,\ \delta^2_{k_1+\cdots+k_l};\ g)$$

$i\neq l=1,\ \cdots,\ m$.

由引理 1, $\lambda_j^{(i)}$, $1\leqslant j\leqslant k_i$ 为 A_i 的非零特征根, $i=1,\ \cdots,\ m$. $\lambda_j^{(i)}$, $1\leqslant j\leqslant k_i$, $\lambda_j^{(l)}$, $1\leqslant j\leqslant k$ 为 A_i+A_l 的非零特征根. $i\neq l=1,\ \cdots,\ m$.

由[4]. 知 $A_iA_l=A_lA_i=0$, 且 $\lambda_j^{(i)}$ 的重数为 $n_{k_1+\cdots+n_{k-1}+j}$. 于是存在正交阵 Γ, 使 A_i, $i=1\cdots,\ m$ 同时对角化, 因此

$$\delta_i^2=\mu'\Gamma\begin{pmatrix}0 & & \\ & I_{n_i} & \\ & & 0\end{pmatrix}\Gamma\mu.\quad i=1,\ \cdots,\ k_1+\cdots+k_m.$$

即引理 2 得证.

定理 若 $X\sim EC_n(\mu,\ I_n,\ g)$, $g(x)>0$ 为 x 的连续函数, 且 X 有有限的 $2n$ 阶矩存在. A_i, $i=1,\ \cdots,\ m$ 为 $n\times n$ 对称阵 $A=\Sigma A_i$, $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ 互不相同且非零. 考虑下面的条件:

(a) $X'A_iX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}\lambda_jy_{ij}$, $(y_{i1},\ \cdots,\ y_{ik})'\sim G\chi^2(n_{i1},\ \cdots,\ n_{ik};\ \delta^2_{i1},\ \cdots,\ \delta^2_{ik};\ g)\quad i=1,\ \cdots,\ m.$

(b) $(X'A_1X,\ \cdots X'A_mX)\overset{d}{=}\Big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_jz_j,\ \cdots,\ \sum_{j=(m-1)k+1}^{mk}\lambda_{j-(m-1)k}z_j\Big)$

$(z_1,\ \cdots,\ z_{mk})'\sim G\chi^2(n_{11},\ \cdots,\ n_{1k},\ n_{21},\ \cdots,\ n_{mk};\ \delta^2_{11},\ \cdots,\ \delta^2_{1k};\ \delta^2_{21},\ \cdots,\ \delta^2_{mk};\ g)$

(c) $X'AX\overset{d}{=}\sum_{j=1}^{k}\lambda_jy_j$, $(y_1,\ \cdots,\ y_k)'\sim G\chi^2(n_1,\ \cdots,\ n_k;\ \delta_1^2,\ \cdots,\ \delta_k^2;\ g)$

(d) $r(A)=\Sigma r(A_i)=\Sigma\Sigma r(A_iE_j)$, $A=\Sigma\lambda_jE_j$, $E_j^2=E$; $E_jE_{j'}=0$, $j\neq j'=1,\ \cdots,\ k$.

(e) k 个等式 $n_j=\Sigma n_{ij}$ 中至少有 $k-1$ 个成立. 则

(I) (a), (b) $\Rightarrow$ (c), (d), (e).

(II) (a), (c), (e) $\Rightarrow$ (b), (d).

(III) (b), (c) $\Rightarrow$ (a), (d), (e).

(IV) (c), (d) $\Rightarrow$ (a), (b), (c).

证明 由引理 1, 引理 2 及[5]立即可得.

需要指出的是, 在这里我们只给出了在椭球等高分布条件下, $\Sigma=I_n$ 的非中心 Cochran 定理, 对于一般情况的 Σ, 其 Cochran 定理有待作进一步的讨论.

感谢林春土副教授对本文的指导.

参考文献

[1] 方开泰、吴月华, 二次型分布与 Cochran 定理, *经济数学*, 1984. 1, 29—47.

[2] 范剑青, 椭球等高分布族的非中心 Cochran 定理及其参数估计. 硕士论文. 科学院应用所, 1984. 11.

[3] 方开泰, 广义多元统计分析—椭球等高分布族理论. 多元分析资料汇编 VIII, 中国科学院应用所. 1983. 1—59.

[4] 张尧庭、方开泰, *多元统计分析引论*. 科学出版社, 北京. 1982.

[5] Khatri, C. G., A theorem on quadratic forms for normal variable. Statisties and Probability Essays in Honor of C. R. Rao (Edited by G. Kallianpar et al) *North Holland*. 1982. 411—417.

[6] 屠伯埙等, *高等代数*. 上海科学技术出版社

NON-CENTRAL COCHRAN'S THEOREM IN ELLPTICALLY CONTOURED DISTRIBUTIONS

ZHANG GUOFEN

(*Zhejiang University*)

Let $X\sim EC_n(\mu, I_n, g)$, where $g(\cdot)$ is a positive and continuous function. In this paper, non-central Cochran's theorem in the quadratic form of $X'AX$, where A is a symmetry matrix, is discussed.