应用概率统计 第十一卷
第四期 1995年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 11, No. 4, November, 1995

一类集值有界变差过程及其对偶投影*

郭 学 鹏
(上海电力学院, 上海, 200090)

摘 要

本文给出了一类集值有界变差过程的定义, 并在有限维情况下证明了集值有界变差过程的可选(可料)对偶投影的存在唯一性.

关键词: 随机集, 集值测度, 集值有界变差过程, 可选(可料)对偶投影.
学科分类号: 211. 62.

§1. 引 言

集值随机过程理论及其研究的处理技巧在数理经济、最优化理论、信息论和控制论等方面有着广泛的应用.

近年来, 有关集值随机分析的研究已取得了不少成果, 然而对集值随机分析研究的基础之一的集值有界变差过程及过程的投影理论尚无研究结果. 本文第三节利用集值测度的概念定义了一类集值有界变差过程, 尽管这种定义在形式上与单点值有界变差过程的定义不同, 但它仍是单点值有界变差过程的概念的推广. 第四节在有限维情况下证明了集值有界变差过程的可选(可料)对偶投影的存在唯一性.

§2. 记号及预备知识

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$为一完备的概率空间, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$为一族上升的$\mathcal{F}$的子$\sigma$-域, 满足通常条件. $(\boldsymbol{X},\|\cdot\|)$为一实可分Banach空间, 其对偶空间记为$\boldsymbol{X}^*$. $(U,\mathcal{U})$为一可测空间, $(\boldsymbol{R}_+,\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+))$为$\boldsymbol{R}_+$上Borel可测空间. 令

$$\mathrm{P}_0(\boldsymbol{X})=\{A\subset\boldsymbol{X};A\neq\varnothing\},$$
$$\mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{X})=\{A\in\mathrm{P}_0(\boldsymbol{X});A\text{是(有界)闭(凸)集}\},$$
$$\mathrm{P}_{wkc}(\boldsymbol{X})=\{A\in\mathrm{P}_0(\boldsymbol{X});A\text{是(弱)紧(凸)集}\}.$$

对于$A,B\in\mathrm{P}_f(\boldsymbol{X})$, 记

$$\|A\|=\sup\{\|x\|;x\in A\},$$
$$|A|=\inf\{\|x\|;x\in A\},$$

*本文得到上海电力学院科研基金资助.
1994年10月20日收到修改稿.

$$d(\boldsymbol{x}, A) = \inf\{\|x - z\|; z \in A\}, \qquad x \in \boldsymbol{X},$$

$$s(\boldsymbol{x}^*, A) = \sup\{< x^*, x >; x \in A\}, \qquad x^* \in \boldsymbol{X}^*,$$

$$\delta(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in B} d(x, A), \sup_{y \in A} d(y, B)\right\},$$

$$A + B = cl\{a + b: a \in A, b \in B\}.$$

称集值映射 $F: \boldsymbol{U} \to \mathsf{P}_f(\boldsymbol{X})$ 为 ($\mathcal{U}$-可测) 随机集, 若如下三个等价条件之一成立 ([6]):

(1) 对任意开集 $G \subset \boldsymbol{X}$, $\{u: F(u) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathcal{U}$;

(2) 对任意 $x \in \boldsymbol{X}$, $d(x, F(u)): \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{R}$ 为 ($\mathcal{U}$-可测) 实值随机变量;

(3) 存在一列 $\boldsymbol{X}$ 值 (强) 可测随机变量 $\{f_n, n \geq 1\}$, 使得

$$F(u) = cl\{f_n(u), n \geq 1\}, \qquad u \in \boldsymbol{U}.$$

一族以 $\boldsymbol{R}_+$ 为参数的随机集 $(F_t, t \in \boldsymbol{R}_+)$ 称为集值 (随机) 过程. 称集值过程 $(F_t, t \geq 0)$ 为可测的 (相应地: 可选的, 可料的), 如果映射 $F_t(\omega): \Omega \times \boldsymbol{R}_+ \to \mathsf{P}_f(\boldsymbol{X})$ 为 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$ (相应地: 可选 σ-域 $\mathcal{O}$, 可料 σ-域 $\mathcal{P}$) 可测的随机集.

对于 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathsf{P}_0(\boldsymbol{X})$, 定义集值无穷级数和为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \in \boldsymbol{X}; \exists x_n \in A_n, n \geq 1 \text{ 使 } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 无条件收敛}\right\}.$$

设 $M: \mathcal{U} \to \mathsf{P}_0(\boldsymbol{X})$ 为一集值映射, 满足 $M(\varnothing) = \{0\}$, 我们称其为:

(1) **集值测度**, 如果对任意不交集列 $(A_n, n \geq 1) \subset \mathcal{U}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n) = M\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big);$$

(2) **δ-集值测度**, 如果 $M(A) \in \mathsf{P}_f(\boldsymbol{X})$, $A \in \mathcal{U}$, 且对任意不交集列 $(A_n, n \geq 1) \subset \mathcal{U}$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} M(A_i) \xrightarrow{\delta} M\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big), \qquad n \to \infty;$$

(3) **弱集值测度**, 如果对任意 $x^* \in \boldsymbol{X}^*$, $s(x^*, M(\cdot))$ 是实值测度.

对于集值测度 $M: \mathcal{U} \to \mathsf{P}_0(\boldsymbol{X})$, M 的全变差 $|M|: \mathcal{U} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ 定义为:

$$|M|(A) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \|M(A_i)\|, \qquad A \in \mathcal{U},$$

其中 π 表示 $A \in \mathcal{U}$ 的 $\mathcal{U}$-可测有限分划全体. 若 $|M|(\boldsymbol{U}) < \infty$, 则称 M 为有界变差集值测度, 用 $BV[\boldsymbol{U}, \mathcal{U}; \boldsymbol{X}]$ 表示 $(\boldsymbol{U}, \mathcal{U})$ 上有界变差集值测度全体. 关于 δ-集值测度, 弱集值测度有类似定义.

对于集值测度 $M: \mathcal{U} \to \mathsf{P}_{wkc}(\boldsymbol{X})$ (此时 M 也是 δ-集值测度, 同时又是弱集值测度), M 的半变差 $\|M\|: \mathcal{U} \to \overline{\boldsymbol{R}}_+$ 定义为:

$$\|M\|(A) = \sup\{|s(x^*, M(\cdot))|(A): x^* \in \boldsymbol{X}^*, \|x^*\| \leq 1\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)\},$$

其中 $|s(x^*, M(\cdot))|$ 表示广义测度 $s(x^*, M(\cdot))$ 的全变差. 若 $\|M\|(\boldsymbol{U}) < \infty$, 则称 M 是半有界变差的. 用 $BSV[\boldsymbol{U}, \mathcal{U}; \boldsymbol{X}]$ 表示 $(\boldsymbol{U}, \mathcal{U})$ 上半有界变差 $\mathsf{P}_{wkc}(\boldsymbol{X})$ 值测度全体.

设 S_M 表示集值测度 M 的向量测度选择全体, 如果 $M \in BV[\boldsymbol{U}, \mathcal{U}; \boldsymbol{X}]$, 则 $S_M \neq \varnothing$ ([7]).

§3. 集值有界变差过程

定义3.1 设$M(\omega,A):\Omega\times\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)\to\mathsf{P}_f(\boldsymbol{X})$为一集值映射，若对任意$\omega\in\Omega,M(\omega,\cdot)$是$(\boldsymbol{R}_+,\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+))$上集值测度(相应地: δ-集值测度, 弱集值测度); 对任意$A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, $M(\cdot,A)$是一随机集, 则称$\{M_t(\omega)=M(\omega,[0,t]),t\geq 0\}$为集值测度过程(相应地: δ-集值测度过程, 弱集值测度过程); 如果进一步, 对每个$\omega\in\Omega$, $M(\omega,\cdot)\in B(S)V[\boldsymbol{R}_+,\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+);\boldsymbol{X}]$, 则称$(M_t,t\geq 0)$为(半)有界变差过程(相应地: δ-(半)有界变差过程, w-(半)有界变差过程).

对于集值测度过程$(M_t,t\geq 0)$, 其轨道实际上是对应于$(\boldsymbol{R}_+,\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+))$上的一集值测度. 任一$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{X})$值$\delta$-集值测度过程(相应地: w-集值测度过程)$(M_t,t\geq 0)$的所有轨道是δ-右连续的(相应地: w右连续的).

定义3.2 设$M=(M_t,t\geq 0)$是一$\mathsf{P}_{fc}(\boldsymbol{X})$值有界变差过程 (或$\delta$-有界变差过程, 或$w$-有界变差过程),

(1)称M是可积有界的, 如果$\mathsf{E}[|M|(\omega,\boldsymbol{R}_+)]<\infty$, 其中$|M|(\omega,\cdot)$表示$M(\omega,\cdot)$的全变差;

(2)称M是局部可积有界的, 如果存在停时$T_n\uparrow+\infty$, a.s., 使得$\mathsf{E}[|M|([\![0,T_n]\!])]<\infty$, $n\geq 1$;

(3)称M是准局部可积有界的, 如果存在停时 $T_n\uparrow+\infty$, a.s., 使得$\mathsf{E}[|M|([\![0,T_n[\![)]<\infty$, $n\geq 1$.

设$M=(M_t,t\geq 0)$是一$\mathsf{P}_{wkc}(\boldsymbol{X})$值有界变差过程, 则由[1]中定理 6.22可知: 若M是适应的, 则M是准局部可积有界的; 若M是可料的, 则M是局部可积有界的.

下面的命题3.3-命题3.5是不难证明的.

命题3.3 设$(M_t,t\geq 0)$是$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{X})$值有界变差过程, 则对任意的$x\in\boldsymbol{X}$及$x^*\in\boldsymbol{X}^*$, $(d(x,M_t),t\geq 0)$, $(s(x^*,M_t),t\geq 0)$和$(\delta(\{x\},M_t),t\geq 0)$皆是实值有界变差过程.

推论3.4 设$(M_t,t\geq 0)$是$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{X})$值有界变差过程, 则 $(\|M_t\|,t\geq 0)$及$(|M_t|,t\geq 0)$皆是实值有界变差过程.

命题3.5 设$(M_t,t\geq 0)$是一$\mathsf{P}_{wkc}(\boldsymbol{X})$值有界变差过程, 则下述等价:

(1)$(M_t,t\geq 0)$是适应(相应地: 可料)集值有界变差过程;

(2)对任意$x\in\boldsymbol{X}$, $\{d(x,M_t),t\geq 0\}$是实值适应(相应地: 可料)有界变差过程;

(3)对任意$x^*\in\boldsymbol{X}^*$, $\{d(x^*,M_t),t\geq 0\}$是实值适应(相应地: 可料)有界变差过程.

§4. 集值有界变差过程的可选(可料)对偶投影

本节恒假定$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}^d$为有限维欧氏空间, $\|\cdot\|$为$\boldsymbol{R}^d$中欧氏范数, 此时$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{R}^d$.

命题4.1 设$M(\cdot)$是$(\boldsymbol{U},\mathcal{U})$上$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值测度, 则下述三条件等价:

(1)$M(\cdot)$是有界变差的;

(2)对任意$x^*\in\boldsymbol{X}^*$, $s(x^*,M(\cdot))$是实值有界变差的;

(3)存在$G\in\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$, 使得对任意$A\in\mathcal{U}$有$M(A)\subset G$.

证明: 由命题3.3可知(1)$\Longrightarrow$(2).

(2)$\Longrightarrow$(3)设$e_1,\cdots,e_{2d}$是$2d$个向量$(0,\cdots,\pm1,\cdots,0)\in\boldsymbol{R}^d$, 记$\nu(\cdot)=\sum_{i=1}^{2d}|s(e_i,M(\cdot))|$, 其中$|s(e_i,M(\cdot))|$表示实值测度$s(e_i,M(\cdot))$的全变差, 则$\nu$是$(\boldsymbol{U},\mathcal{U})$上非负有限测度, 且对任意$x\in M(A)$, 有$\|x\|\leq\nu(A)\leq\nu(\boldsymbol{U})<\infty,A\in\mathcal{U}$.

令

$$G=\{x\in \boldsymbol{R}^d;\|x\|\le \nu(\boldsymbol{U})\}$$

则知$G\in \mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$, 且对任意$A\in \mathcal{U}$, 有$M(A)\subset G$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 定义$e_1,\cdots,e_{2d}$及$\nu(\cdot)$同上, 则由(3)知$s(e_i,M(\cdot))$是实值有限测度, $i=1,\cdots,2d$, 从而知$\nu(\cdot)$是非负有限测度, 且对任意$A\in \mathcal{U}, x\in M(A)$有

$$\|x\|\le \nu(A)\nu(\boldsymbol{U})<\infty,$$

故知$M(\cdot)$是有界变差的.

引理4.2 设$D^*=\{x_i^*;i\ge 1\}$是$\boldsymbol{R}^d$中可列稠子集, $M:\mathcal{U}\to \mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$为一集值映射, 则$M(\cdot)$是集值有界变差测度当且仅当对任意$x_i^*\in D^*$, $s(x_i^*,M(\cdot))$是实值有界变差测度.

证明: 由命题4.1及支撑函数性质, 利用[2]中定理2.3.8易知.

记

$$\mathcal{C}=\{[0],]a,b];a\le b,a,b\in Q_+\cup\{+\infty\}\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)\},$$

其中Q_+表示$\boldsymbol{R}_+$中的有理数全体, 并约定$]a,+\infty]=]a,+\infty[$, 作

$$\mathcal{A}=\Big\{\sum_{i\in I}c_i;\{c_i,i\in I\}\text{为}\mathcal{C}\text{互不相交的有限族}\Big\},$$

则$\mathcal{A}$是由半域$\mathcal{C}$生成的最小代数, $\mathcal{A}$中只有可列个元素, 并且有$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)=\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$.

定理4.3 (1) 设$M=(M_t,t\ge 0)$是一$\mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值准局部可积有界的有界变差过程, 则存在唯一$\mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值可选有界变差过程$N=(N_t,t\ge 0)$, 使得对任意$x^*\in \boldsymbol{R}^d$, 有

$$s(x^*,N_t)=s(x^*,M_t)^o,\qquad t\ge 0;$$

(2) 设$M=(M_t,t\ge 0)$是一$\mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值局部可积有界的有界变差过程, 则存在唯一$\mathrm{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值可料有界变差过程$N=(N_t,t\ge 0)$, 使得对任意$x^*\in \boldsymbol{R}^d$, 有

$$s(x^*,N_t)=s(x^*,M_t)^p,\qquad t\ge 0,$$

其中$s(x^*,M)^o$和$s(x^*,M)^p$表示实值过程$(s(x^*,M_t),t\ge 0)$的可选和可料对偶投影.

证明: 在(1)或(2)的条件下, 易知对任意$x^*\in \boldsymbol{R}^d$, 实值过程$(s(x^*,M_t),t\ge 0)$是准局部可积的或局部可积的有界变差过程, 故$s(x^*,M)^o$或$s(x^*,M)^p$存在.

下面只证(2), (1)的证明完全类似.

由[5]中定理8.3知, 对任意$\omega\in\Omega$, 存在$m(\omega,\cdot)\in S_{M(\omega,\cdot)}$, $m(\omega,\cdot)$是$(\boldsymbol{R}_+,\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+))$上$\boldsymbol{R}_+$值有界变差测度, 且对任意$(\omega,A)\in\Omega\times\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, $m(\omega,A)\in M(\omega,A)$, 故对任意$x^*\in \boldsymbol{R}^d$,

$$<x^*,m(\omega,A)>\le s(x^*,M(\omega,A)),$$

$m=(m_t(\omega)=m(\omega,[0,t]),t\ge 0)$是$\boldsymbol{R}^d$值局部可积有界变差过程, 设$m^p(\cdot)$是$m(\cdot)$对应的可料对偶投影, 则对任意$x_i^*\in D^*$ (D^*的定义同引理4.2, 且假定$\{e_i,i=1,\cdots,2d\}\subset D^*$, e_i是$2d$个向量$(0,\cdots,\pm 1,\cdots,0)\in \boldsymbol{R}^d$), $A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$)有

$$<x_i^*,m^p(\omega,A)>=<x_i^*,m>^p(\omega,A)\le s(x_i^*,M)^p(\omega,A)\qquad a.s.$$

设使上式不成立的例外集为$\mathcal{N}_A^i, i \geq 1, A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$, 其中$< x_i^*, M >^p$和$s(x_i^*, m)^p$分别表示实值过程$< x_i^*, M >$和$s(x_i^*, M)$的可料对偶投影.

令

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i \geq 1} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{N}_A^i,$$

则$\mathsf{P}(\mathcal{N}) = 0$, 且对任意$\omega \in \mathcal{N}^c, x_i^* \in D^*, A \in \mathcal{A}$, 有

$$< x_i^*, m^p(\omega, A) > \leq s(x_i^*, M)^p(\omega, A).$$

对$\omega \in \mathcal{N}^c, A \in \mathcal{A}$, 令

$$\begin{aligned} N'(\omega, A) &= \bigcap_{i \geq 1} \{x \in \boldsymbol{R}^d; < x_i^*, x > \leq s(x_i^*, M)^p(\omega, A)\} \\ &= \bigcap_{j=1}^{2d} \{x \in \boldsymbol{R}^d; < e_j, x > \leq s(e_j, M)^p(\omega, A)\} \end{aligned}$$

则知

$$\begin{aligned} &N'(\omega, A) \in \mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d), \qquad \omega \in \mathcal{N}^c, A \in \mathcal{A}, \\ &s(x_i^*, N'(\omega, A)) = s(x_i^*, M)^p(\omega, A), \qquad \omega \in \mathcal{N}^c, A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

对于$\omega \in \mathcal{N}^c$, 由于$s(x_i^*, M)^p(\omega, \cdot)$是$\mathcal{A}$上实值有限测度, 故由引理4.2知$N'(\omega, \cdot)$是$\mathcal{A}$上$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值测度. 由 [2]中的引理5.5.3可知$N'(\omega, \cdot)$能够唯一地扩张成为$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$上$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值集值测度, 记为$N(\omega, \cdot)$.

对于$\omega \in \mathcal{N}$, 令

$$N(\omega, A) = \{0\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+),$$

则对一切$\omega \in \Omega, N(\omega, \cdot)$是$\mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+)$上$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值测度, 且对几乎所有$\omega \in \Omega, x^* \in \boldsymbol{R}^d$有

$$s(x^*, N(\omega, A)) = s(x^*, M)^p(\omega, A), \qquad A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}_+).$$

由命题3.3及引理4.2知集值过程$N = (N_t(\omega) = N(\omega, [0, t]), t \geq 0)$是可料的$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值有界变差过程.

至于N的唯一性, 由实值过程$s(x^*, M)^p$的唯一性及支撑函数的性质易知.

对于准局部可积有界(相应地, 局部可积有界)$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值有界变差过程$M = (M_t, t \geq 0)$, 称由定理4.3中唯一确定的$\mathsf{P}_{bfc}(\boldsymbol{R}^d)$值可选(相应地, 可料)有界变差过程$N = (N_t, t \geq 0)$为$M$的可选 (相应地, 可料)对偶投影, 并记为$M^o = (M_t^o, t \geq 0)$(相应地, $M^p = (M_t^p, t \geq 0)$). 对任意$x^* \in \boldsymbol{R}^d$, 我们有$s(x^*, M)^o = s(x^*, M^o)$(相应地, $s(x^*, M)^p = s(x^*, M^p)$). 假设$T$是一有限停时(相应地, 可料时), 可以证明, $\mathsf{E}[M_T] = \mathsf{E}[M_T^o]$(相应地, $\mathsf{E}[M_T] = \mathsf{E}[M_T^p]$).

参 考 文 献

[1] 严加安, 鞅与随机积分引论, 上海科技出版社, 1981.

[2] 张文修, 集值测度与随机集, 西安交通大学出版社, 1989.

[3] He, S. W., Wang, J. A. and Yan, J. A., *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*, Science Press and CRC Press Inc. 7 Boca Raten Ann Arbor London Tokyo, 1992.

[4] Diestel, J. and Uhl, J. J. JR., Vector Measures, *Amer. Math. Soc.*, Providence, Rhode Island, 1977.
[5] Artstein, Z., Set-valued measrees, *TAMS*, Vol. **165**(1972) 103-125.
[6] Hiai, F. and Umegaki, H., Integrels, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multi. Anal.* **7**(1977), 149-182.
[7] Hiai, F., Radon-Nikodym theorems for set-valued measures, *J.Multi.Anal.* **8**(1978), 96-118.
[8] Papageorgion, N. S., On the theory of Banach space valued multifunctions, 2,. Set valued martingales and set valued measures, *J.Multi.Anal.* **17**(1985), 207-227.

A Class of Set-valued Processes with Finite Variation and Its Dual Projections

GUO XUEPENG

(*Shanghai Institute of Electric Power, Shanghai*)

In this paper, a class of set-valued processes with finite variation is defined. Also the existence and the uniqueness of the dual optional (predictable) projections is investigated.