应用概率统计　第二十卷
第四期　2004 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 20 No. 4 Nov. 2004

固体燃料抗拉强度的可靠性评估

郭　奎　　于　丹
(中国科学院系统科学研究所，北京，100080)

摘　要

抗拉强度是固体燃料的重要力学性能指标，该指标的退化是导致固体燃料失效的一个重要的故障模式．本文利用相应的贮存试验数据给出模型参数的估计，运用信仰推断方法 (fiducial) 和二阶正态逼近方法 (WCF) 给出可靠度置信下限，并对这两种方法进行了模拟比较．

关 键 词：可靠度置信下限，信仰推断，二阶正态逼近，最小二乘法．

学 科 分 类 号：O211.6.

§1.　引　　言

固体燃料的贮存寿命主要取决于燃料的理化性能指标，而抗拉强度是其中重要的力学性能指标之一．本文利用贮存年限及相应的抗拉强度指标的测量值，给出模型参数的最小二乘估计．并在该估计量的基础给出了两种计算可靠度置信下限的方法，一种方法是基于信仰推断的统计思想，计算出可靠度置信分布，进而得出可靠度置信下限；另一种方法利用系统可靠性综合评估的思想计算可靠度置信下限，该方法是 Winterbottom(1980) 推广了的分位点的 Cornish-Fisher 展开方法 (WCF)．最后对上述两种方法分别进行了模拟比较．

§2.　贮存模型及参数估计

设贮存时间为 t 时下固体燃料的抗拉强度 X_t 服从正态分布 $N(\mu(t),\sigma^2)$，依据工程经验认为抗拉强度随贮存时间呈指数衰减，满足模型 $\mu(t)=ab^{-t}$，$a,b>0$，σ^2 未知．贮存试验数据为

$$\left\{\begin{array}{llll} t_1, & x_{11}, & \cdots, & x_{1n_1} \\ t_2, & x_{21}, & \cdots, & x_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m, & x_{m1}, & \cdots, & x_{mn_m} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

其中 t_i 表示贮存年限，$X_{i1},\cdots,X_{in_i}$ 表示贮存时间为 t_i 时的不同药块抗拉强度的测量值．这时 a, b 的最小二乘估计为

$$\widehat{a}=\exp(\overline{Y}+\log(\widehat{b})\bar{t}),\qquad \widehat{b}=\exp\Big(-\Big[\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})(Y_i-\overline{Y})\Big]\Big/\Big[\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2\Big]\Big), \tag{2.2}$$

另外取参数 σ^2 的估计量为

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2,$$

其中

$$Y_i=\log(\overline{X}_i),\qquad \overline{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\qquad \overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,\qquad \bar{t}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}t_i.$$

所以 $\mu(t)$ 的估计为 $\widehat{\mu}(t)=\widehat{a}\widehat{b}^{-t}$.

本文 2003 年 3 月 12 日收到，2003 年 10 月 30 日收到修改稿.

§3. 可靠度置信限

由于 X_t 服从正态分布 $N(\mu(t),\sigma^2)$, 当 $X_t \le \mu_0$ 时认为抗拉强度处于超标状态，这时可靠度为

$$R(t) = \mathrm{P}(X_t > \mu_0) = 1 - \Phi\Big(\frac{\mu_0 - \mu(t)}{\sigma}\Big),$$

把 $\widehat{\mu}(t)$ 和 $\widehat{\sigma}$ 的估计代入上式可得可靠度的点估计量 $\widehat{R}(t)$. 在从事实际项目的研究工程中，我们发现所涉及到的观察数据通常都是小子样或特小子样情形．例如 m 和 n_i, $i=1,\cdots,m$ 一般不超过 10, 在这种情形下点估计会有较大的误差，而现有的区间估计方法在小子样情况下效果也不理想，很难满足工程需要，为了给出可靠度的置信区间，在这里我们首先对参数空间进行扩张，使得可靠度点估计具有较简单的结构，进一步在此基础上构造出两种可靠度下限的推断方法．

3.1 信仰推断方法 (fiducial)

记 $\mu_i = ab^{-t_i}$, $i=1,\cdots,m$, 由 $\mu(t)=ab^{-t}$, 通过最小二乘法，可以得到参数 a, b 和参数 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 一种形式上的关系，即

$$a^* = \exp(\overline{\mu} + \log(b^*)\overline{t}), \qquad b^* = \exp\Big(-\Big[\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{t})(\log(\mu_i)-\overline{\mu})\Big]\Big/\Big[\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{t})^2\Big]\Big), \tag{3.1.1}$$

这里

$$\overline{\mu} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(\mu_i).$$

易知 $T_i = \sqrt{n_i}(\overline{X}_i - \mu_i)/\widehat{\sigma}$, $i=1,\cdots,m$ 服从自由度为 $N-m$ 的 t- 分布， $Z=(N-m)\widehat{\sigma}^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $N-m$ 的 χ^2- 分布．将 $\mu_i = \overline{X}_i - T_i\widehat{\sigma}/\sqrt{n_i}$, $\sigma=\sqrt{(N-m)\widehat{\sigma}^2/Z}$ 代入 $R(t)=1-\Phi((\mu_0-\mu^*(t))/\sigma)$. 其中 $\mu^*(t)=a^*b^{*-t}$, 可得 $R(t)$ 关于 $T_1,\cdots,T_m$, Z, t 的函数，即

$$R(t) = 1 - f(Z,T_1,\cdots,T_m,t), \tag{3.1.2}$$

由于 $T_1,\cdots,T_m$ 和 Z 是枢轴量，分别具有已知分布，因此利用随机模拟方法容易计算出 $R(t)$ 的近似分布，此处我们称之为可靠度的近似置信分布，给定置信水平就可以得到相应的置信下限估计．

3.2 WCF 展开方法

利用 (3.1.1) 式, 对于固定的 t, $R(t)$ 可以表示成关于 $\mu_1,\cdots,\mu_m$, σ^2 的函数, 记为 $R=\psi(\mu_1,\cdots,\mu_m,\mu_{m+1})$, 其中 $\mu_{m+1}=\sigma^2$, 记 $\widehat{\mu}_i=\overline{X}_i$, $(i=1,\cdots,m)$, $\widehat{\mu}_{m+1}=\widehat{\sigma}^2$, 则可靠度 R 的估计量为 $\widehat{\psi}=\psi(\widehat{\mu}_1,\cdots,\widehat{\mu}_{m+1})$, 令 $n=\min(n_1,\cdots,n_m,n_{m+1})$, $n_{m+1}=N-m$, 设 $n\to\infty$ 时， $n_i/n\to\alpha_i$, $i=1,\cdots,m+1$. 为了利用 WCF 展开方法 (参见 [3]), 只需验证估计量 $\widehat{\mu}=(\widehat{\mu}_1,\cdots,\widehat{\mu}_{m+1})$ 满足适当的条件，由 $\widehat{\mu}_i$ $(i=1,\cdots,m+1)$ 渐近正态，及

$$\mathrm{E}(\widehat{\mu}_i-\mu_i)=0, \qquad \mathrm{E}(\widehat{\mu}_i-\mu_i)^2=\frac{\mu_{m+1}}{n_i}, \qquad \mathrm{E}(\widehat{\mu}_i-\mu_i)^3=0, \qquad i=1,\cdots,m.$$

$$\mathrm{E}(\widehat{\mu}_{m+1}-\mu_{m+1})=0, \qquad \mathrm{E}(\widehat{\mu}_{m+1}-\mu_{m+1})^2=\frac{2{\mu_{m+1}}^2}{n_{m+1}}, \qquad \mathrm{E}(\widehat{\mu}_{m+1}-\mu_{m+1})^3=\frac{8{\mu_{m+1}}^3}{n_{m+1}^2}, \tag{3.2.1}$$

四阶以上的累量满足 $K_j=O(n^{1-j})$, $(j\ge 4)$, 这时存在参数估计量的函数 H, G_1, G_3 使得

$$V_n = G_1 n^{-1} + H(\widehat{\psi}-\psi) + G_3(\widehat{\psi}-\psi)^2 \tag{3.2.2}$$

满足 $\sqrt{n}V_n$ 的特征函数 $g(t)=\exp(-t^2/2)+O(n^{-1})$. 因此有

$$\mathrm{P}\{\psi-\widehat{\psi}\le x\} = \Phi(-G_1n^{-1/2}+Hn^{1/2}x-G_3n^{1/2}x^2)+O(n^{-1}). \tag{3.2.3}$$

下面给出上式中的 H、G_1、G_3 的计算结果，记

$$
\begin{aligned}
h &= \Big(\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j^2 V_j\Big)^{-1/2}, \qquad A = h\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j B_j + \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1}\psi_{jj}V_j + \sum_{j=1}^{m+1}\psi_j H_j{}^{(11)}, \\
B &= h^3\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j^3 W_j + 3h^3\sum_{i,j=1}^{m+1}\psi_i\psi_{ij}\psi_j V_i V_j + \frac{3}{2}h\sum_{j=1}^{m+1}\psi_{jj}V_j + 3h\sum_{j=1}^{k}\psi_j B_j \\
&\quad -3h^3\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j^3 V_j B_j + 3h^2\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j^3 H_j{}^{(13)} - 9h^2\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j^3 V_j H_j{}^{(11)} + 9\sum_{j=1}^{m+1}\psi_j H_j{}^{(11)},
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

其中 ψ_j，ψ_{jj} 表示函数 ψ 对相应的变元偏导数，B_j，V_j，W_j，$H_j{}^{(11)}$，$H_j{}^{(13)}$ 定义如下：

$$
\begin{cases}
B_j = \lim\limits_{n\to\infty} n\mathsf{E}(\widehat{\mu}_j - \mu_j), \\
V_j = \lim\limits_{n\to\infty} n\mathsf{E}(\widehat{\mu}_j - \mu_j)^2, \\
W_j = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\mathsf{E}(\widehat{\mu}_j - \mu_j)^3, \\
H_j{}^{(11)} = \lim\limits_{n\to\infty} n\mathsf{E}[H_j(\widehat{\mu}_j - \mu_j)^2], \\
H_j{}^{(13)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\mathsf{E}[H_j(\widehat{\mu}_j - \mu_j)^4], \\
j = 1,\cdots,m+1.
\end{cases}
\tag{3.2.5}
$$

通过计算可得

$$
\begin{aligned}
&B_j = 0, \qquad V_j = \frac{\mu_{m+1}}{\alpha_j}, \qquad W_j = 0, \\
&H_j{}^{(11)} = H_j\frac{\mu_{m+1}}{\alpha_j}, \qquad H_j{}^{(13)} = H_j\frac{3\mu_{m+1}^2}{\alpha_j^2}, \\
&H_j = -h^3\sum_{i=1}^{m+1}\psi_i\psi_{ij}V_i, \qquad j = 1,\cdots,m, \\
&B_{m+1} = 0, \qquad V_{m+1} = \frac{2\mu_{m+1}^2}{\alpha_{m+1}}, \qquad W_{m+1} = \frac{8w_{m+1}^3}{\alpha_{m+1}^2}, \\
&H_{m+1}^{(11)} = H_{m+1}\frac{2\mu_{m+1}^2}{\alpha_{m+1}}, \qquad H_{m+1}^{(13)} = 3H_{m+1}\frac{4\mu_{m+1}^4}{\alpha_{m+1}^2}, \\
&H_{m+1} = -\frac{1}{2}h^3\Big[(\psi_{m+1})^2\frac{4\mu_{m+1}}{\alpha_{m+1}} + 2\sum_{i=1}^{m+1}\psi_i\psi_{i,m+1}V_i\Big].
\end{aligned}
$$

(3.2.4) 给出的是 $h = h(w)$，$A = A(w)$，$B = B(w)$，它们都是参数的函数．用 $\widehat{w}$ 代替 w，分别得到 $H = h(\widehat{w})$，$\widehat{A} = A(\widehat{w})$，$\widehat{B} = B(\widehat{w})$．(3.2.2) 中的 G_1，G_3 分别为

$$
G_1 = \frac{1}{6}\widehat{B} - \frac{3}{2}\widehat{A}, \qquad G_3 = \frac{1}{2}\widehat{A}H^2 - \frac{1}{6}\widehat{B}H^2,
$$

以下称

$$
\mathsf{P}\{\psi - \widehat{\psi} \le x\} \simeq \Phi(-G_1 n^{-1/2} + Hn^{1/2}x - G_3 n^{1/2}x^2) + O(n^{-1}) \tag{3.2.6}
$$

为随机变量 $\psi - \widehat{\psi}$ 分布的二阶正态逼近．由以上式子可以得出 ψ 的置信下限为：

$$
\psi_L = \widehat{\psi}_n - x_p H^{-1} n^{-1/2} + (G_3 x_p^2 + G_1 H^2)H^{-3}n^{-1}, \tag{3.2.7}
$$

这里 x_p 为正态分布的 p 分位点，此计算可靠度置信下限方法简称为 WCF 方法．

§4. 模拟计算

本节对上边给出的两种方法分别进行了模拟计算，此处取参数 $a=80$, $b=1.2$, 临界值 $\mu_0=20$, 均方差 $\sigma=10$, 可靠度真值分别为 $R=0.99, 0.95, 0.90$, 置信度 $\gamma=0.7, 0.8, 0.9$, 模拟次数 5000. 表 1-3 列出了样本量 5 和 10 时的两种方法模拟比较结果，表 4 列出了样本量为 2 时 fiducial 方法的模拟结果，表 5 列出了样本量为 35 时 WCF 方法的模拟结果. 表中分位点指置信下限模拟结果的分位点，该量越接近可靠度真值说明方法越精确；表中方差指置信下限相对于可靠度真值的离散程度，即下限样本与可靠度真值平均离差平方和. 由表中的模拟结果可以看到， fiducial 方法对于样本量为 2 也可以得到比较好的结果，样本量大时，抽取 t 分布和 χ^2 分布随机数计算量也增大. WCF 方法的精确度与样本量有关，样本量越大计算结果越精确. 如果样本量特别小，这个方法不适合.

表 1　模拟比较结果 ($R(t)=0.99$, $t=3.3716$)

样本量	方法	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差
5	WCF	0.6772	0.9911	0.0022	0.7524	0.9929	0.0035	0.8100	0.9964	0.0075
	fiducial	0.7098	0.9895	0.0025	0.7976	0.9901	0.0041	0.8820	0.9916	0.0096
10	WCF	0.6976	0.9901	0.0006	0.7814	0.9908	0.0011	0.8536	0.9926	0.0022
	fiducial	0.7230	0.9891	0.0007	0.8098	0.9895	0.0011	0.9086	0.9893	0.0027

表 2　模拟比较结果 ($R(t)=0.95$, $t=4.3117$)

样本量	方法	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差
5	WCF	0.6852	0.9533	0.0146	0.7680	0.9593	0.0246	0.8360	0.9720	0.0437
	fiducial	0.6804	0.9544	0.0132	0.7612	0.9597	0.0205	0.8584	0.9646	0.0347
10	WCF	0.6912	0.9512	0.0061	0.7768	0.9544	0.0095	0.8714	0.9584	0.0167
	fiducial	0.6806	0.9531	0.0055	0.7456	0.9588	0.0078	0.8596	0.9596	0.0130

表 3　模拟比较结果 ($R(t)=0.9$, $t=4.8876$)

样本量	方法	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差
5	WCF	0.6902	0.9037	0.0297	0.7692	0.9124	0.0454	0.8609	0.9279	0.0787
	fiducial	0.6562	0.9134	0.0250	0.7320	0.9245	0.0339	0.8422	0.9301	0.0535
10	WCF	0.6914	0.9023	0.0134	0.7976	0.9008	0.0214	0.8768	0.9121	0.0349
	fiducial	0.6520	0.9104	0.0114	0.7340	0.9172	0.0161	0.8308	0.9263	0.0229

表 4　样本量 2, fiducial 方法

时间	真值 (R)	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差
3.3716	0.99	0.6946	0.9905	0.0161	0.8030	0.9895	0.0301	0.8786	0.9946	0.0659
4.3117	0.95	0.6940	0.9530	0.0470	0.7728	0.9628	0.0679	0.8728	0.9670	0.1168
4.8876	0.90	0.6746	0.9132	0.0679	0.7646	0.9234	0.0911	0.8494	0.9513	0.1417

表 5　样本量 35, WCF 方法

时间	真值 (R)	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差	覆盖率	分位点	方差
3.3716	0.99	0.6894	0.9902	0.0000	0.7934	0.9902	0.0001	0.8780	0.9906	0.0002
4.3117	0.95	0.6966	0.9502	0.0012	0.7946	0.9504	0.0017	0.8838	0.9522	0.0032
4.8876	0.90	0.6994	0.9001	0.0033	0.7922	0.9015	0.0047	0.8894	0.9023	0.0080

通过对这两种方法的分析，可以得出这样一个结论，如果样本量一致地小，用 fiducial 方法可以满足工程需要；样本量一致地大，用 WCF 方法可以得出比较好的结果；那么一部分样本量大另一部分小时，单纯用一种方法都不合适．因而考虑把这两种方法结合起来，即样本量小的那一部分用 fiducial 方法计算出可靠度置信分布，样本量大的部分用 WCF 方法处理，最后把这两个结果结合起来，运用融合方法计算出整体的可靠度置信下限．这里所提及的融合方法还有待进一步论证．

参 考 文 献

[1] 于丹，戴树森，导弹系统贮存可靠性评估方法，技术报告，中国科学院系统科学研究所， 1997.

[2] 于丹，戴树森，复杂系统可靠性综合评估方法研究，技术报告，中国科学院系统科学研究所， 1996.

[3] Winterbottom, A., Asymptotic expansions to improve large sample confidence intervals for system reliability, *Biometrica*, **67**(1980), 351–357.

Reliability Evaluation of Solid Propellant Tensile Strength

GUO KUI　　YU DAN

(Institute of Systems Science Chinese Academy of Science, BeiJing, 100080)

Tensile strength is an important physics performance index of solid propellant, and the degradation of this index is a crucial failure mode that results in the failure of solid propellant. This paper presents the model parameter estimation basing on the storage test data, and lower reliability confidence limit by means of fiducial inference and second order normal approximation. Based on the above two method, we have done lots of simulation.