几乎相合性与 Bayes 相合性

赵 炯 之

(中国金融学院　北京, 100013)

摘　　要

本文包含两部分，首先我们证明了一个定理，它断言：在唯一的条件"不同参数值对应着不同的分布"之下，必存在一个"几乎相合"的估计，其次，基于这一结果，我们在很一般的条件下证明了当样本量趋于无穷时，一个贝叶斯决策必然是贝叶斯相合的，也就是说，若以 R_n 记样本量为 n 时贝叶斯决策的贝叶斯风险，则当 $n\to\infty$ 时有 $R_n\to\inf\limits_{\theta} L(\theta_0 a)$ 这里 L 为损失函数，a 跑遍行动空间，而 θ_0 为真参数值。

一　引　　言

设有欧氏可控空间 (x, β)，即 x 为欧氏空间 R^k 或其一 Borel 子集，β 为 x 的一切 Borel 子集构成的 σ 域．在 β 上有一个概率测度族 $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$，参数空间 Θ 为欧氏空间 R^k，或其一 Borel 子集．设 $X_1, \cdots, X_n$ 为取值于 x 的 iid 样本，其公共分布为 P_θ．要利用这些样本去估计某一定义在 Θ 上的已知函数 $g(\theta)$．大样本理论的一个基本问题是：在什么条件下存在 $g(\theta)$ 的一个相合估计．这个问题前人已有过一些研究，例如可参看文献 [1] 和 [2]，这些工作都需要对分布族 $\{P_\theta,\ \theta\leftarrow\Theta\}$ 与 $g(\theta)$ 加上一些条件——有一个条件是不言自明的，即当 $P_{\theta_1}=P_{\theta_2}$ 时必须有 $g(\theta_1)=g(\theta_2)$，但除这个显然条件以外，可否不加任何条件就能证明 $g(\theta)$ 的相合估计存在呢？对这个问题、陈希孺同志曾举出一个反例，证明是不可能的．

本文的目的之一就是证明：如果把相合性的需求略为放低一点，就可以证明存在性．设在参数空间 Θ 的一切 Borel 子集构成的 σ-域 $\mathscr{F}$ 上引进一个概率测度 ν，设 $T_n=T_n(X_1, \cdots, X_n)$ 是 ν 几乎处处有限可测函数 $g(\theta)$ 的估计，$n=1, 2, \cdots$，若存在 $A\in\mathscr{F}$，$\nu(A)=0$，使当 $\theta\notin A$，$\theta\in\Theta$ 特，必有 $T_n\xrightarrow{P_\theta}g(\theta)$，则称 T_n 为 $g(\theta)$ 的几乎弱 ν-相合估计．若将上述 $T_n\xrightarrow{P_\theta}g(\theta)$ 改为 $P_\theta(T_n\to g(\theta))=1$，则称 T_n 为 $g(\theta)$ 的几乎强 ν-相合估计．本文定理 1 将证明：对任何 ν，$g(\theta)$ 的几乎强 ν-相合估计必存在．这个结果可被用于解决 Bayes 决策的 Bayes 相合性问题．

关于 Bayes 估计在通常意义下的相合性，在文献中有不少讨论，比较近期的工作可参看 [3] 和 [4]，然而从统计决策的观点看，更有兴趣的是 Bayes 相合性，即当样本量 $n\to\infty$ 时，Bayes 决策的 Bayes 风险收敛于损失函数的最小值，此值可以调整为 0．本文将证明，若损失函数有界，则只要它满足一个很轻微的条件，则 Bayes 决策必为 Bayes 相合．即使损失函数不有界，也只要再增加某些仍属自然的条件，Bayes 相合也可以保持．值得提出的是：可以举出这样的例子，其中 Bayes 估计的 Bayes 风险为有限，但 Bayes 估计并非 Bayes 相合，就是说，根本不存在 Bayes 相合的估计．

本文 1994 年 3 月 8 日收到，1994 年 10 月 24 日收到修改稿

二　几乎强相合估计的存在性

本节的目的就是证明下面的定理:

定理1. 在前面的记号下，若当 $\theta_1\neq\theta_2$ 时，$P_{\theta_1}\neq P_{\theta_2}$ 又设对任何 $A\in\beta$, $P_\theta(A)$ 为 θ 的 Borel 可测函数，则对 $\mathscr{F}$ 上的任何概率测度 ν, $g(\theta)$ 的几乎强 ν-相合估计必存在.

为证明定理1，以 F_θ 记概率测度 P_θ 的分布函数，以 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 记 R^k 的全部有理点. 任取 r_j, 把 $F_\theta(r_j)$ 视为 Θ 上的函数. 据假定它是 θ 的 Borel 可测函数. 给定 $\varepsilon>0$, 据 Lusin 定理存在有界闭集 $M_j\subset\Theta$, 使 $F_\theta(r_j)$ 作为 M_j 上的函数, 在 M_j 上连续, 且

$$\nu(\Theta-M_j)<\varepsilon/2^j,\ 记\ M=\bigcap_{j=1}^{\infty}M_j,则$$

$\nu(\Theta-M)<\varepsilon$, 且对任何 j, $F_\theta(r_j)$ 作为 θ 在 M 上的函数, 在 M 上连续, 由此可找到一串有界闭集 $\Theta_1\subset\Theta_2\subset\cdots\subset\Theta$, 使 $\nu(\Theta_i)\to1$, 当 $i\to\infty$ 时，且对任何固定的 j, 及 R^k 中之有理点 r_j, $F_\theta(r_j)$ 作为 θ 在 Θ_i 上之函数，及函数 $g(\theta)$，都是连续的，对任意两个 k 维分布函数 F_{θ_1}, F_{θ_2} 定义:

$$D(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})=\sup_{j\geq1}|F_{\theta_1}(r_j)-F_{\theta_2}(r_j)|=\sup_{u\in R^k}|F_{\theta_1}(u)-F_{\theta_2}(u)|$$

易见对任何 Θ_i 及常数 $\eta>0$, 有

$$\inf\{D(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}): \theta_1\in\Theta_i,\ \theta_2\in\Theta_i,\ \|\theta_1-\theta_2\|\geq\eta\}>0$$

不然的话, 将找到 $\theta_1\neq\theta_2$ 都属于 Θ_i, 使 $D(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})=0$, 这将推出 $F_{\theta_1}=F_{\theta_2}$ 与假定矛盾.

现取一串常数 $\{\eta_m\}$, $\eta_1>\eta_2>\cdots\downarrow0$ 记

$$\alpha_m=\sup\{\|g(\theta_1)-g(\theta_2)\|: \theta_1\in\Theta_m,\ \theta_2\in\Theta_m,\ \|\theta_1-\theta_2\|\leq2k\eta_m\}\quad m=1、2,\ \cdots;\tag{1}$$

$$\delta_m=\inf\{D(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}): \theta_1\in\Theta_m,\ \theta_2\in\Theta_m\|\theta_1-\theta_2\|\geq\eta_m\}\quad m=1,\ 2,\ \cdots;\tag{2}$$

其中 $\eta_1, \eta_2, \cdots$ 可取得充分小, 使 $\alpha_m\to0$, 当 $m\to\infty$, 又按前述, 有 $\delta_m>0$, 记

$$\varepsilon_m=\min(1/m,\ \delta_m/3)\tag{3}$$

根据 Kiefer 和 Wolfowitz 的一个结果(见[5])，存在自然数 n_m, 使当 $n\geq n_m$ 时, 对一切 $\theta\in\Theta$ 有

$$P_\theta(D(F_n, F_\theta)\geq\varepsilon_m)<1/n^2\tag{4}$$

此处 F_n 为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的经验分布函数, 不失普遍性, 可设 $n_1<n_2<\cdots$,

现把空间 R^k 剖分为一些立方体:

$$\{\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_k): a_j\eta_m\leq\theta_j<(a_j+1)\eta_m,\ j=1,\ \cdots,\ k\}\quad a_j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,$$

把这些立方体排列为 $E_1, E_2, \cdots$, 其中心记为 $e_1, e_2, \cdots$, 定义:

$$\xi_{mnj}=\xi_{mnj}(X_1, \cdots, X_n)=\begin{cases}2, & 当\ \Theta_m\cap E_j=\varnothing\\ \inf\{D(F_\theta, F_n),\ \theta\in\Theta_m\cap E_j\}, & 当\ \Theta_m\cap E_j\neq\varnothing\end{cases}\tag{5}$$

易证 ξ_{mnj} 为 Borel 可测.

现引进估计量 $T_n=T_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 如下: 找 m, 使 $n_m\leq n<n_{m+1}$, 计算 ξ_{mnj}, $j=1, 2, \cdots$, 因为 Θ_m 为有界闭集, 除有限个 j 之外, 皆有 $\xi_{mnj}=2$, 找最小的 $j=j_0=j_0(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 使 ξ_{mnj} 达到最小, 即

$$\xi_{mnj_0}=\min\{\xi_{mnj}: j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\},\ 且\xi_{mnj}>\xi_{mnj_0},\quad 当\ j\wedge j_0\tag{6}$$

令

$$T_n(X_1, \cdots, X_n)=g(e_{j_0(X_1, X_2, \cdots, X_n)})\tag{7}$$

显然，因 ξ_{mnj} 可测，$T_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 可测. 令

$$\Theta_0=\Theta-\bigcup_{m=1}^{\infty}\Theta_m,$$

设真参数值 $\theta\in\Theta-\Theta_0$，则 $\theta\in\Theta_{m_0}$，对某个 m_0，当 n 充分大，因而 m 充分大时，有 $m\geqslant m_0$，因而 $\theta\in\Theta_{m0}$. 设事件 $\{D(F_n, F_\theta)<\varepsilon_m\}$ 发生，θ 属于某个 E_q，环绕 E_q，尚有 3^k-1 个 $\{E_i\}$ 中之立方体，其全体连同 E_q 本身在内，构成 ν，不难知道，E_{j_0} 必在 ν 内，因而若 E_{j_0} 在 ν 外，则 $\inf\{D(F_\theta, F_n): \theta\in\Theta_m\}$ 在 ν 外某点 $\tilde{\theta}$ 达到，但 ν 外之点与 θ 之距离不少于 η_m，故按(2)式有

$$D(F_\theta, F_{\tilde{\theta}})\geqslant\delta_m\geqslant3\varepsilon_m.$$

又因为 $D(F_\theta, F_n)<\varepsilon_m$，二者结合，有 $D(F_n, F_{\tilde{\theta}})>\varepsilon_m>D(F_n, F_\theta)$ 与 $\inf\{D(F_\theta, F_n): \theta\in\Theta_m\}$ 在 $\tilde{\theta}$ 处达到矛盾，这就证明了 E_{j_0} 必在 ν 内，因而其中心 e_{j_0} 与 θ 之距离不超过 $2k\eta_m$，因此据(1)式，有

$$\|g(\theta)-T_n\|=\|g(\theta)-g(e_{j_0})\|\leqslant\alpha_m$$

现任给 $\varepsilon>0$，找 m_1 充分大，使当 $m>m_1$ 时，$\alpha_m<\varepsilon$，又找 m_2 充分大使 $1/m_2<\varepsilon$，找 N_0 充分大，使当 $n\geqslant N_0$ 时满足 $n_m\leqslant n<n_{m+1}$ 的那个 $m\geqslant\max(m_0, m_1, m_2)$，则根据以上讨论及(4)式，有 $P_\theta^n(\|T_n-g(\theta)\|>\varepsilon)<1/n^2$，当 $n\geqslant N_0$

按 Borel-Cantelli 引理，即得

$$P_\theta^{\infty}(T_n\to g(\theta))=1,$$

此结果对于任何 $\theta\in\Theta-\Theta_0$ 成立而 $\nu(\Theta_0)=0$. 定理1证毕.

(注：上面构造的估计 T_n 具有如下性质：对任何样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$T_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的取值必在 $g(\theta)$ 的值域 $\{g(\theta): \theta\in\Theta\}$ 内，这一点对以下两节有用).

三　Bayes 相合性——损失函数有界的情况

设给定了行动空间 S. 假定 S 是欧氏空间，或欧氏空间的 Borel 子集. S 的一切 Borel 子集所构成的 σ 域记为 M，设给定了定义于 $S X\Theta$ 上的损失函数 $L(a, \theta)$，假定 L 为非负，Borel 可测. 设 Θ 的一切 Borel 子集所构成的 σ-域上给定了先验概率测度 ν，$\delta=\delta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为一决策函数，其风险为：

$$R(\delta, \theta)=\int_{\mathscr{X}^n}L(\delta(X_1, \cdots, X_n), \theta)dP_\theta(X_1)\cdots dP_\theta(X_n),$$

而 Bayes 风险为

$$R(\delta)=\int_\Theta R(\delta, \theta)d\nu(\theta).$$

注意 $R(\delta)$ 与样本量 n 有关，如果

$$\lim R(\delta)=\inf\{L(a, \theta): a\in S, \theta\in\Theta\}\tag{8}$$

则称决策函数 δ 为(先验分布 ν 之下)Bayes 相合的.

定理2　若损失函数 L 满足以下条件.

1° Borel 可测、非负、有界；

2° 对某个 $\theta\in\Theta$，存在决策 $g(\theta)\in S$，使 $L(g(\theta), \theta)=0$(这表示对某个状态 θ，有一个损失为0的决策 $g(\theta)$)且 $L(a, \theta)$当固定 θ 时作为 a 的函数，在 $a=g(\theta)$处连续. 则 Bayes 决策必为 Bayes 相合.

证　根据定理1，存在 $g(\theta)$的几乎强 ν 相合估计 $\delta=\delta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，于是存在 ν 零

集Θ. 使

$$\lim_{n\to\infty} L(\delta(X_1, X_2, \cdots, X_n), \theta) = L(g(\theta), \theta) = 0 \quad \text{a.s.} \quad \theta \overline{\in} \Theta_0$$

又因为 L 有界, 按控制收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty} R(\delta, \theta) = 0, \quad \theta \overline{\in} \Theta \tag{9}$$

由 L 有界知 R 有界, 故由(9), 再由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} R(\delta) = \lim_{n\to\infty} \int_\Theta R(\delta, \theta) d\nu(\theta) = 0.$$

故 Bayes 决策必为 Bayes 相合. 定理证毕.

(四) Bayes 相合性——损失函数无界的情况

损失函数 L 有界是一个限制性很大的假定. 本节将去掉该假定. 并沿用前面的记号.

定理 3. 设损失函数 L 满足定理 2 中除有界外一切条件, 又设存在 Borel 有界集, 序列$\Theta_m \uparrow \Theta$ 和 $S_n \uparrow S$, 满足以下条件

1° $\sup\{L(a, \theta): a \in S_k, \theta \in \Theta_k\} = C_{mk}$ 对 $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ (10)

2° 对任何 m, 存在 $l = l_m$, 使当 $\theta \in \Theta_m$ 时, $g(\theta) \in S_l$.

3° 对任何 k, 记 $h(k, \theta) = \sup\{L(a, \theta): a \in S_k\}$ (11)

则

$$\int_\Theta h(k, \theta) d\nu(\theta) < \infty \tag{12}$$

4° 对任何 k, 存在 $s = s_k > 0$, 使

$$U_{a\in S_k} W(a, s) \subset S_{k+1},$$

此处 $W(a, s)$ 为以 a 为中心, s 为半径的球. 则在先驱分布 ν 之下的 Bayes 决策必为 Bayes 相合的.

这些条件形式上较复杂, 其实都是很自然的, 在通常应用中一般满足条件. 以 $\Theta = R^K$ 和 $S = R^L$ 这个情况来看, Θ_m 和 $\bar{S}_m$ 可取以 0 为中心, 半径为 m 的球. 条件 1° 无非是说 L 在整个空间可以无界, 但在有界的范围内应为有界. 这一般不成问题. 条件 2° 是说当 θ 有界时, 相应的最优行动也为有界. 这也是通常的情况. 条件 4° 满足只须取 $s_k < 1$. 只有条件 3° 是一个较为实质性的限制. 在许多情况下(但不总是如此), 此条件相当于要求对任何 a, 有

$$\int_\Theta L(a, \theta) dv(\theta) < \infty.$$

而这个条件通常对于 Bayes 决策的 Bayes 风险有限, 是必要的, 在这些条件下, 条件 3° 就成为自然的要求.

现转到定理的证明, 记 $\bar{\Theta}_m = \Theta - \Theta_m$, $\bar{S}_m = S - S_m$. 取完 $a_0 \in S_1$, 找 m 充分大, 使

$$\int_{\bar{\Theta}_m} L(a_0, \theta) d\nu(\theta) < s \tag{13}$$

这种 m 的存在由条件 3° 推出. 按定理 1, 存在 $g(\theta)$ 的几乎强 v-相合估计 $\delta = \delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其取值全在 S 内. 为书写简单计, 不妨设例外集为 $\Theta_0(v(\Theta_0) = 0)$为空集, 不然的话, 只须以 $\Theta - \Theta_0$ 代替 Θ 去进行讨论即可.

定义一个决策函数 δ 如下:

$$\delta=\delta(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\begin{cases}\bar{\delta}=\bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n) & \text{当 } \bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in S_k\\ a_0 & \text{当 } \bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n)\overline{\in} S_k\end{cases}\tag{14}$$

其中 k 是这样决定的. 按条件 2° 存在 l, 使当 $\theta\in\Theta_m$ 时, (m 满足(13)), 有 $g(\theta)\in S_l$, 取 $k=l+1$, 现有

$$R(\delta)=\int_{\Theta_m}R(\delta,\ \theta)d\nu(\theta)+\int_{\bar{\Theta}_m}R(\delta,\ \theta)d\nu(\theta)\tag{15}$$

其中 $R(\delta,\ \theta)=\int_{\mathscr{X}^n}L(\delta(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)dp_\theta(x_1)\cdots dp_\theta(x_n)$ 是 δ 的风险函数. 按 δ 的定义(14)及条件 1°, 当 $\theta\in\Theta_m$ 时, $L(\delta(x_1,\ \cdots,\ x_m),\ \theta)\leqslant C_{mk}$ 有界, 由于 $\delta\to g(\theta)$, 按定理 2 条件 2°, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R(\delta,\ \theta)=0$. 再加上 $R(\delta,\ \theta)$ 有界(不超过 C_{mk}), 按控制收敛定理, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Theta_m}R(\delta,\ \theta)d\nu(\theta)=0\tag{16}$$

对(15)右边第二项, 找 $u>m$, 使

$$\int_{\bar{\Theta}_u}h(k,\ \theta)d\nu(\theta)<\varepsilon\tag{17}$$

这种 u 的存在由(12)式得出. 因为对任何 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 及 θ 有

$$L(\delta(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)\leqslant h(k,\ \theta),\quad \text{故有 } R(\delta,\ \theta)\leqslant h(k,\ \theta),$$

因而由(17)得

$$\int_{\bar{\Theta}}R(\delta,\ )\theta d\nu(\theta)<\varepsilon\tag{18}$$

现任取 $\theta\in\Theta_u-\Theta_m=\Theta_u\cap\bar{\Theta}_m$. 首先, 按条件 1°, 对这个范围内的 θ 及任何 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$, 有

$$L(\delta(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)\leqslant C_{uk}<\infty\tag{19}$$

按定理 2 的假定 2°, 对给定 $\varepsilon>0$, 存在 η, $(0<\eta<1)$, 使当 $\|a-g(\theta)\|<\eta$ 时, 有 $L(a,\ \theta)<\varepsilon$. 记 $H_\theta=\{a:a\in S,\ \|a-g(\theta)\|<\eta\}$. 所有的样本$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$可分为三种情况:

a. $L(\bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)\in H_\theta\cap S_k$,

b. $L(\bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)\in\bar{H}_0\cap S_k$, $\bar{H}_0=S-H_0$

c. $L(\bar{\delta}(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \theta)\overline{\in} S_k$

若 $g(\theta)\overline{\in} S_k$, 则按 $\bar{\delta}$ 的定义, 条件 4° 及 $\eta<1$, 可知情况 a 的概率为 0. 又由 $\bar{\delta}$ 的几乎相合性及 δ 的定义(14), 可知情况 b、c 的概率分别为 $d_{n\theta}$, 及 $1-d_{n\theta}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}d_{n\theta}=0$. 故在这一场合有 $R(\delta,\ \theta)\leqslant d_{n\theta}h(k,\ \theta)+(1-d_{n\theta})L(a_0,\ \theta)$, 于是

$$\lim\sup R(\delta,\ \theta)\leqslant L(a_0,\ \theta)\tag{20}$$

若 $g(\theta)\in S_k$, 而以 $a_{n\theta}$, $b_{n\theta}$, $c_{n\theta}$ 分别记以上三部分样本的概率, 则仍有

$$\lim_{n\to\infty}b_{n\theta}=0,$$

于是, 因 $R(\delta,\ \theta)\leqslant a_{n\theta}\varepsilon+b_{n\theta}h(k,\ \theta)+c_{n\theta}L(a_0,\ \theta)$ 有

$$\lim\sup R(\delta,\ \theta)\leqslant\varepsilon+L(a_0,\theta)\tag{21}$$

结合(20), (21)并考虑由(19)得 $R(\delta,\ \theta)$ 当 $\theta\in\Theta_u-\Theta_m$ 的有界性得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\Theta_u-\Theta_m}R(\delta,\ \theta)d\nu(\theta)&\leqslant\int_{\Theta_u-\Theta_m}\lim_{n\to\infty}\sup R(\delta,\ \theta)d\nu(\theta)\\ &\leqslant\varepsilon+\int_{\Theta_u-\Theta_m}L(a_0,\ \theta)d\nu(\theta)\leqslant\varepsilon+\int_{\bar{\Theta}_m}L(a_0,\ \theta)d\nu(\theta)\leqslant\varepsilon+\varepsilon\leqslant2\varepsilon\end{aligned}\tag{22}$$

最后一式根据(13), 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\sup R(\delta)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\Theta_m}R(\delta,\ \theta)dv(\theta)+\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\bar{\Theta}_u}R(\delta,\ \theta)dv(\theta)$$
$$+\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\Theta_u-\Theta_m}R(\delta,\ \theta)dv(\theta)\leqslant 2\varepsilon. \tag{23}$$

由于 Bayes 决策的 Bayes 风险不超过(14)定义的决策 δ 的 Bayes 风险. 故由(23)及 $\varepsilon>0$ 的任意性知, 当样本量 $n\to\infty$ 时, Bayes 决策的 Bayes 风险趋于 0, 这完成了本定理的证明.

参 考 文 献

[1] Ibragimov, I. A. Has'minskii R. Z. Statistial Estimation, Springer-verlag. 1981.

]2] Ghosh, J. R. Book Review: *Approximation Theorems of Mathematical Statistics JASA*, 1983, p731~732.

[3] Dainel Barry: *Nonparametric Bayesian Regression.* Annals of statistics, 1986, p934~953.

[4] Gordon Simons: *Bayes value for a chincal-triens Model with Dichatomous respens*, annals of Statistics, 1986, p954~970.

[5] Kiefer J., Wolfowitz, J. *On the deviations of The empyric distrihution function of vector Chance variables*, Trans Amer Math *Sco.* **87**, 173~186. 1958.

ALMOST CONSISTENCY AND BAYES CONSISTENCY

ZHAO JIONGZHI

This paper Consists of two parts. First we prove a theorem asserting that under the sole condition, that different parameter Values correspond to different distributions, an "almost consistent" estimate of the para meter must exist. Further based on this result, we show, under very gencral conditlons, that as the sample size tends to infinity, a Bayesian strategy must be "Bayesian Consistent" If we denote by Rn the Baysian risk of the Bayesian strategy with sample size n, then $R_n\to\inf L(\theta_0, a)$ as $n\to\infty$, where L is the loss funetion, a runs over the action space and θ_0 is the true parameter.