应用概率统计　第八卷
第一期 1992 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 8 No. 1. Feb. 1992

损失函数估计的可容许性

邹　国　华　　　　周　光　亚
(景德镇陶瓷学院，景德镇，333001)　(吉林大学，长春，130023)

摘　　要

本文考虑损失函数的估计问题．主要讨论了正态分布和 Poisson 分布情形下均值的通常估计量的损失之估计的可容许性．

§1．引　　言

1987 年，Berger 和 Lu 在前人工作的基础上于[1]中提出了衡量估计量精确程度的一种新的办法——估计损失函数的方法．按通常的频率观点，估计量的精度是用平均损失即风险函数来衡量的．但估计损失的方法认为，估计量的衡量标准应是损失本身，由于损失中含有未知参数，从而是未知的，所以就用损失的估计来作为衡量估计量精度的标准．两种方法的一个比较可参见[2]．因为损失的估计很多，这样就有一个好坏的问题．本文的目的是给出损失的较好之估计——可容许估计．

假设 $\delta(X)$ 作为参数 θ 的估计其损失是 $L(\theta,\ \delta(X))$，对此损失的估计量记为 $\hat{L}_\delta(X)$，由此造成的损失采用平方误差 $L^*(L,\ \hat{L}_\delta)=(\hat{L}_\delta-L)^2$ 来衡量，其风险函数是 $R_L^*(\theta,\ \hat{L}_\delta)=E_\theta L^*(L,\ \hat{L}_\delta)$．因此，通常的可容许性等概念就可相应地建立起来．注意，关于 $\hat{L}_\delta$ 的精度我们仍是用频率意义下的风险作为衡量标准的．

当 $X\sim N_p(\theta,\ I)$ 时，Johnstone(见[1])讨论了 X 的无偏估计 p 作为 $\|X-\theta\|^2$ 的估计的可容许性，得出：p 为可容许的充要条件是 $p\leqslant 4$．

本文考虑正态分布和 Poisson 分布情形下通常估计量的损失之估计的可容许性．在§2 中讨论 $X\sim N_p(\theta,\ \sigma^2 I)$ (σ^2 未知)的情形．我们首先找到了 $\dfrac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^4}$ 的一类估计，其风险比 $\dfrac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^4}$ 的无偏估计 p 的风险更小．这节的主要目的是给出 $\dfrac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}$ 的广义 Bayes 估计及其为可容许估计的充分条件，这里我们发展了 Brown-Hwang 方法[3]．作为我们结果的特例可得到 Johnstone 的上述结果．在§3 中我们讨论了 Poisson 分布情形，所得结果基本上与正态分布情形相对应．

本文 1988 年 7 月 6 日收到，1991 年 1 月 8 日收到修改稿．

§2. 正态分布时通常估计量损失的可容许估计

Johnstone 已证，当 $X\sim N_p(\theta,\ I)$时，若 $p\geqslant 5$，则 p 不是$\|X-\theta\|^2$的可容许估计. 其实，只要 $0<a<4(p-4)$，那么 $p-\frac{a}{\|X\|^2}$ 便能控制 p.

现在考虑 $X\sim N_p(\theta,\ \sigma^2 I)$($\sigma^2$ 未知)的情形. 我们给出 $\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}$ 的一类估计，当 $p\geqslant 5$ 时，它们的风险小于无偏估计 p 的风险.

设 W 与 X 独立，服从 $\sigma^2\chi_f^2$ 分布. 则 $EW=f\sigma^2$ 以及 $EW^2=f(f+2)\sigma^4$. 定义

$$\hat{L}(X)=p-\frac{bW}{\|X\|^2}\tag{1}$$

定理 1 设 $p\geqslant 5$, $0<b<\frac{4(p-4)}{f+2}$. 则 $\hat{L}(X)$的风险小于 p 的风险.

证明 p 与 $\hat{L}(X)$的风险差为

$$\begin{aligned}\Delta&=E\left[p-\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}\right]^2-E\left[\hat{L}(X)-\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}\right]^2\\&=b\cdot\left\{2pE\frac{W}{\|X\|^2}-bE\frac{W^2}{\|X\|^4}-2EW\cdot\sum_{i=1}^{p}E\left[\frac{1}{\|X\|^2}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\cdot\frac{(X_i-\theta_i)^2}{\sigma^2}\right]\right\}\end{aligned}\tag{2}$$

用分部积分法可证

$$E\left[\frac{1}{\|X\|^2}\cdot\frac{(X_i-\theta_i)^2}{\sigma^2}\right]=\sigma^2E\left[\frac{8X_i^2}{\|X\|^6}-\frac{2}{\|X\|^4}\right]+E\frac{1}{\|X\|^2}\tag{3}$$

故将(3)式代入(2)式得

$$\Delta=bf\sigma^4[-b(f+2)+2(p-4)]\cdot E\frac{1}{\|X\|^4}>0.$$

证毕.

下面给出 $\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}$ 的广义 Bayes 估计的表达式，进而得到它们为可容许估计的充分条件.

设 G 是参数空间 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^+$ 上的非负测度，有二次可微的密度 $g(\theta,\ \sigma)$，并且对紧集 $K\subset\mathbb{R}^p$，有 $G(K\times\mathbb{R}^+)<\infty$; 对 $\forall$ 开集 $U\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^+$，有 $G(U)>0$. 记

$$I_x h(\theta,\ \sigma,\ x)\triangleq\iint h(\theta,\ \sigma,\ x)\cdot\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^p}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{p}(x_j-\theta_j)^2\right\}d\theta d\sigma\tag{4}$$

假定

$$I_x|\sigma^2 g''_{\theta_i}|<\infty,\quad 对\ \forall x,\ i=1,\ \cdots,\ p.\tag{5}$$

再记

$$\hat{L}_g(x)\triangleq p+\sum_{i=1}^{p}\frac{I_x(\sigma^2 g''_{\theta_i})}{I_x g}.\quad\left(\frac{I_x(\sigma^2 g''_{\theta_i})}{\infty}\triangleq 0\right)\tag{6}$$

用分部积分法易证

引理 1 若 $I_x g<\infty$, $I_x|g'_{\theta_i}|<\infty$, $I_x|\sigma^2 g''_{\theta_i}|<\infty$, 对 $\forall x$, $i=1,\ \cdots,\ p$. 则有

$$I_x\left[\frac{\sum(x_i-\theta_i)^2}{\sigma^2}g\right]=I_x g+I_x(\sigma^2 g''_{\theta_i})$$

由此引理知，当 $I_x g<\infty$, $I_x|g'_{\theta_i}|<\infty(i=1, \cdots, p)$时，有

$$\hat{L}_g(\chi)=\frac{I_x\left(\frac{\|\chi-\theta\|^2}{\sigma^2}g\right)}{I_x g} \tag{7}$$

它是 $\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}$ 的对应于 g 的广义 Bayes 估计.

为了获得 $\hat{L}_g(X)$是可容许估计的充分条件，我们采用 Blyth 方法. 设 $h_n(\theta)$: $\mathbb{R}^p \to [0, 1]$ 是几乎处处二次可微的函数，且 $h_n(\theta)=0(\theta\notin K_n$, K_n 为紧集), $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(\theta)=1$(a.e.). 再假定对 $\forall$ 紧集 $K\subset\mathbb{R}^p$，有

$$\sup\left\{E_{\theta,\sigma}\left[\hat{L}_g(X)-\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}\right]^2: (\theta, \sigma)\in K\times\mathbb{R}^+\right\}<\infty. \tag{8}$$

记 $g_n(\theta, \sigma)\triangleq h_n^4(\theta)g(\theta, \sigma)$，并设 $\hat{L}_{g_n}(X)$是 $\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2}$ 的对应于 g_n 的 Bayes 估计.

引理 2 以 $B(g, \hat{L})$表示 $\hat{L}$ 的 Bayes 风险。若存在$\{h_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\Delta_n\triangleq B(g_n, \hat{L}_g)-B(g_n, \hat{L}_{g_n})\to 0.$$

则 $\hat{L}_g(X)$是可容许估计.

注 显然，$\frac{\|X-\theta\|^2}{\sigma}$ 可改为一般的函数.

定理 2 若存在$\{h_n\}$，使得

(a) $\hat{L}_{g_n}(x)=p+\sum\limits_{i=1}^p\frac{I_x(\sigma^2 g''_{n,\theta_i})}{I_x g_n}+\frac{R_n(x)}{I_x g_n}$

且当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int\frac{[R_n(x)]^2}{I_x g_n}dx\to 0;$$

(b) $\iint\sigma^4(h'_{n,\theta_i})^4 g d\theta d\sigma\to 0$;

(c) $\iint\sigma^4(h''_{n,\theta_i})^2 g d\theta d\sigma\to 0$;

(d) $\iint\sigma^4(h'_{n,\theta_i})^2(g'_{\theta_i})^2/g d\theta d\sigma\to 0$;

(e) $\iint\sigma^4(g''_{\theta_i})^2/g d\theta d\sigma<\infty$.

其中 $i=1, \cdots, p$. 则 $\hat{L}_g(X)$是可容许估计.

证明 由引理 2 只需证 $\Delta_n\to 0$. 易见

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\int(\hat{L}_g-\hat{L}_{g_n})^2 I_x g_n dx\\&\leqslant 2p\sum_{i=1}^p\iint\left[\frac{I_x(\sigma^2 g''_{\theta_i})}{I_x g}-\frac{I_x(\sigma^2 g''_{n,\theta_i})}{I_x g_n}\right]^2 I_x g_n dx\\&\quad+2\int\frac{[R_n(x)]^2}{I_x g_n}dx\triangleq U_n+V_n\end{aligned} \tag{9}$$

由(a)知 $V_n\to 0$. 故只要证 $U_n\to 0$ 即可. 因为 $g_n=h_n^4 g$，所以有

$$U_n\leqslant\sum_{i=1}^p\left\{K_1\iint\left[\frac{I_x(\sigma^2 g''_{\theta_i})}{I_x g}-\frac{I_x(\sigma^2 h_n^4 g''_{\theta_i})}{I_x g_n}\right]^2\cdot I_x g_n dx\right.$$

$$+K_2\int\frac{[I_\chi(\sigma^2h_n^3h'_{n,\theta_i}g'_{\theta_i})]^2}{I_\chi g_n}d\chi+K_3\int\frac{[I_\chi(\sigma^2h_n^3h''_{n,\theta_i}g)]^2}{I_\chi g_n}d\chi$$

$$+K_4\int\frac{[I_\chi(\sigma^2h_n^2h'^2_{n,\theta_i}g)]^2}{I_\chi g_n}d\chi\Big\}$$

$$\triangleq\sum_{i=1}^{n}(K_1D_n+K_2C_n+K_3B_n+K_4A_n) \tag{10}$$

其中 $K_i(i=1,\cdots,4)$为正常数.

1° 由(b)并利用 Schwarz 不等式得

$$A_n\leqslant\int I_\chi[\sigma^4(h'_{n,\theta_i})^4g]d\chi$$

$$=\iint\sigma^4(h'_{n,\theta_i})^4gd\theta d\sigma\to0.$$

2° 与1°类似知 $B_n\to0$; $C_n\to0$.

3° 由于

$$D_n\leqslant\int I_\chi\Big[g_n\Big(\frac{I_\chi(\sigma^2g''_{\theta_i})}{I_\chi g}-\frac{\sigma^2g''_{\theta_i}}{g}\Big)^2\Big]d\chi$$

$$\leqslant\int I_\chi[\sigma^4(g''_{\theta_i})^2/g]dx$$

$$=\iint\sigma^4(g''_{\theta_i})^2/gd\theta d\sigma<\infty.$$

所以由控制收敛定理知 $D_n\to0$. 总之, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $U_n\to0$. 证毕.

注 如果 σ^2 已知, 上述结论仍成立, 只需去掉关于 σ 的积分.

作为定理 2 的一个应用, 在下面的例子中我们推出 Johnstone(见[1])的结果.

例 1 设 $\sigma\equiv1, g\equiv1$. 则 p 是对应于 g 的广义 Bayes 估计. 利用上述定理可证: 若 $p\leqslant4$, 则 p 是 $\|X-\theta\|^2$ 的可容许估计.

事实上, 取

$$h_n(\theta)=\begin{cases}1 & \|\theta\|\leqslant1\\ 1-\dfrac{\ln\|\theta\|}{\ln n} & 1\leqslant\|\theta\|\leqslant n\\ 0 & \|\theta\|\geqslant n\end{cases}$$

$n=2,3,\cdots$. 易见, 我们只需验证定理 2 的条件(a), (b), (c)被满足即可. 由于(c)的证明与(b)的相似, 所以我们只验证条件(a)和(b).

1° 记 $n_1\triangleq\sqrt{n^2-\sum_{j\neq i}\theta_j^2}$, $n_2\triangleq\sqrt{1-\sum_{j\neq i}\theta_j^2}$ 及 $d\theta^i\triangleq d\theta_1\cdots d\theta_{i-1}d\theta_{i+1}\cdots d\theta_p$. 使用分部积分法可以证明

$$\int_{\|\theta\|<n}(x_i-\theta_i)^2g_n\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p}\exp\Big\{-\frac12\sum_{j=1}^p(x_j-\theta_j)^2\Big\}d\theta$$

$$=I_\chi g_n+I_\chi g'_{n,\theta_i}+R_n^i(\chi) \tag{11}$$

其中

$$R_n^i(x)=-\frac{4}{\ln n}\int_{\sum_{j\neq i}\theta_j^2<1}n_2\Big[\exp\Big\{-\frac12(\chi_i+n_2)^2\Big\}$$

$$+\exp\Big\{-\frac12(x_i-n_2)^2\Big\}\Big]\cdot\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p}\exp\Big\{-\frac12\sum_{j\neq i}(x_j-\theta_j)^2\Big\}d\theta^i \tag{12}$$

从而

$$\hat L_{g_n}(x)=p+\sum_{i=1}^p\frac{I_\chi g''_{n,\theta_i}}{I_\chi g_n}+\frac{R_n(x)}{I_\chi g_n} \tag{13}$$

这里 $R_n(\chi)=\sum_{i=1}^{p}R_n^i(\chi)$. 现证当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int\frac{[R_n(x)]^2}{I_\chi g_n}\,dx\to 0 \tag{14}$$

这只需证对任何 $i=1,\cdots,p$, 成立

$$\int\frac{[R_n^i(x)]^2}{I_\chi g_n}\,dx\to 0. \tag{15}$$

因为当 $x_i\geqslant 0$ 时，有 $(x_i-\theta_i)^2\leqslant(x_i+1)^2$ 及 $x_i^2-2x_i\leqslant(x_i-n_2)^2\leqslant(x_i+n_2)^2$，其中 $\theta_i\in[-n_2,n_2]$. 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{[R_n^i(x)]^2}{I_\chi g_n}\,d\chi&=2\int d\chi^i\int_0^\infty\frac{[R_n^i(x)]^2}{I_\chi g_n}\,d\chi_i\\&\leqslant\frac{K}{\ln^2 n}\int dx^i\int_{\sum_{j\neq i}\theta_j^2\leqslant 1}n_2\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(x_j-\theta_j)^2\right\}d\theta^i\\&\leqslant\frac{K}{\ln^2 n}\int_{\sum_{j\neq i}\theta_j^2<1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,d\theta^i\\&\to 0.\ (n\to\infty\text{ 时})\end{aligned}$$

其中的 K 为正常数. 因此条件(a)被满足.

2° 因为

$$(h'_{n,\theta_i})^4=\frac{\theta_i^4}{\|\theta\|^8\ln^4 n}\,\chi_{\{1<|\theta|<n\}}\leqslant\frac{1}{\|\theta\|^4\ln^4(\|\theta\|\vee 2)}\,\chi_{\{|\theta|>1\}} \tag{16}$$

其中 $a\vee b\triangleq\max\{a,b\}$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}(h'_{n,\theta_i})^4=0$(a. e.), 所以当 $p\leqslant 4$ 时, 由控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}(h'_{n,\theta_i})^4d\theta=0 \tag{17}$$

这说明条件(b)被满足. 故根据定理 2 知，当 $p\leqslant 4$ 时, p 是可容许的.

§3. Poisson 分布时通常估计量损失的可容许估计

设 $X_1,\cdots,X_p$ 相互独立, $X_i\sim$ Poisson(θ_i), $i=1,\cdots,p$. 我们知道，通常采用的 θ 的估计量是 X. 本节给出 $\|X-\theta\|^2$ 的广义 Bayes 估计及其为可容许估计的充分条件. 为使结果便于应用, 我们把参数 θ_i 化成自然参数 φ_i, 为此令 $\varphi_i=\ln\theta_i$, 则 $\|X-\theta\|^2=\sum_{i=1}^{p}(X_i-e^{\varphi_i})^2$. 记

$$I_\chi h(x,\varphi)\triangleq\int h(x,\varphi)\cdot\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{x_j!}\exp\{\varphi_jx_j-e^{\varphi_j}\}d\varphi \tag{18}$$

假定

$$I_x|g'_{\varphi_i}|<\infty,\ I_\chi|g''_{\varphi_i}|<\infty.\ \text{对 }\forall x,\ i=1,\cdots,p. \tag{19}$$

定义

$$\hat{L}_g(x)\triangleq Z+\sum_{i=1}^{p}\frac{I_\chi g'_{\varphi_i}}{I_\chi g}+\sum_{i=1}^{p}\frac{I_\chi g''_{\varphi_i}}{I_\chi g} \tag{20}$$

其中 $Z=\sum_{i=1}^{p}x_i$, 且规定 $\frac{I_\chi g'_{\varphi_i}}{\infty}\triangleq 0$, $\frac{I_\chi g''_{\varphi_i}}{\infty}\triangleq 0$.

与引理 1 类似，有

引理3 设 $I_x g<\infty$, $I_x|g'_{\varphi_i}|<\infty$, $I_x|g''_{\varphi_i}|<\infty$, 对 $\forall x$, $i=1, \cdots, p$. 则有

(a) $I_x[(x_i-e^{\varphi_i})g]=-I_x g'_{\varphi_i}$;

(b) $I_x[(x_i-e^{\varphi_i})^2 g]=x_i I_x g+I_x g'_{\varphi_i}+I_x g''_{\varphi_i}$.

根据上述引理知,当 $I_x g<\infty$ 时, $\hat{L}_g(X)$ 是 $\|X-\theta\|^2$ 的对应于 g 的广义 Bayes 估计.

与(8)式对应地,假定对 $\forall$ 紧集 $K\subset\mathbb{R}^p$, 有

$$\sup\left\{E_\varphi\left[\hat{L}_g(X)-\sum_{i=1}^{p}(X_i-e^{\varphi_i})^2\right]^2: \varphi\in K\right\}<\infty. \tag{21}$$

再记 $g_n(\varphi)\triangleq h_n^4(\varphi)g(\varphi)$, 而 $h_n(\varphi)$ 的性质如前.

定理3 若存在 $\{h_n\}$, 使得

(a) $\hat{L}_{g_n}(x)=Z+\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{I_x(g'_{n,\varphi_i})}{I_x g_n}+\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{I_x(g''_{n,\varphi_i})}{I_x g_n}+\dfrac{R_n(x)}{I_x g_n}$.

且当 $n\to\infty$ 时,有

$$\sum_{\substack{x_i=0\\ i=1,\cdots,p}}^{\infty}\frac{[R_n(x)]^2}{I_x g_n}\to 0;$$

(b) $\int(h'_{n,\varphi_i})^2 g d\varphi\to 0$;

(c) $\int(h'_{n,\varphi_i})^4 g d\varphi\to 0$;

(d) $\int(h''_{n,\varphi_i})^2 g d\varphi\to 0$;

(e) $\int(h'_{n,\varphi_i})^2(g'_{\varphi_i})^2/g d\varphi\to 0$;

(f) $\int(g'_{\varphi_i})^2/g d\varphi<\infty$;

(g) $\int(g''_{\varphi_i})^2/g d\varphi<\infty$.

其中 $i=1, \cdots, p$. 则 $\hat{L}_g(X)$ 是可容许估计.

证明 与定理2的证明类似,这里从略.

例2 取 $g\equiv 1$, 则 $\hat{L}_g(X)=Z$. 下面研究它的可容许性. 我们有: 若 $p\leqslant 2$, 则 Z 必是 $\|X-\theta\|^2$ 的可容许估计. 易见, 这只需验证定理3的条件(a)—(d)被满足即可. 取 $h_n(\varphi)$ 如例1中的 $h_n(\theta)$, 则与例1类似可证条件(b), (c)和(d)成立. 因此我们只验证条件(a). 利用分部积分法可以证明

$$\hat{L}_{g_n}(x)=Z+\sum_{i=1}^{p}\frac{I_x g'_{n,\varphi_i}}{I_x g_n}+\sum_{i=1}^{p}\frac{I_x g''_{n,\varphi_i}}{I_x g_n}+\frac{R_n(x)}{I_x g_n} \tag{22}$$

其中 $R_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}R_n^i(x)$, 而

$$\begin{aligned}R_n^i(x)=&-\frac{4}{\ln n}\int_{\sum_{j\neq i}\varphi_j^2<1}n_2(\exp\{-n_2x_i-e^{-n_2}\}\\&+\exp\{n_2x_i-e^{n_2}\})\cdot\frac{1}{x_i!}\prod_{j\neq i}\frac{1}{x_j!}\exp\{\varphi_j x_j-e^{\varphi_j}\}d\varphi^i.\end{aligned} \tag{23}$$

这里 n_2 和 φ^i 的意义均与例1一样. 由此,为使(a)成立,只需证当 $n\to\infty$ 时,有

$$\sum_{\substack{x_i=0\\ i=1,\cdots,p}}^{\infty} \frac{[R_n^i(x)]^2}{I_x g_n} \to 0. \tag{24}$$

因为当 $\theta_i\in[-n_2, n_2]$时，有 $e^{-x_i-e}\leqslant\exp\{\theta_i\chi_i-e^{\theta_i}\}\leqslant e^{\chi_i}$. 所以可得到

$$\frac{[R_n^i(x)]^2}{I_x g_n}\leqslant\frac{32}{\ln^2 n}\, e^{3x_i+e}\cdot\frac{1}{x_i!}\cdot\int_{\sum_{j\neq i}\varphi_j^2<1}\prod_{j\neq i}\frac{1}{x_j!}\exp\{\varphi_j x_j-e^{\varphi_j}\}d\varphi^i \tag{25}$$

故

$$\sum_{\substack{x_i=0\\ i=1,\cdots,p}}^{\infty}\frac{[R_n^i(x)]^2}{I_x g_n}\leqslant\frac{32\,e^e}{\ln^2 n}\sum_{x_i=0}^{\infty}\frac{e^{3x_i}}{x_i!}\cdot\sum_{\substack{x_j=0\\ j\neq i}}^{\infty}\int_{\sum_{j\neq i}\varphi_j^2<1}\prod_{j\neq i}\frac{1}{x_j!}\cdot$$

$$\cdot\exp\{\varphi_j x_j-e^{\varphi_j}\}d\varphi^i=\frac{K}{\ln^2 n}\int_{\sum_{j\neq i}\varphi_j^2<1}d\varphi$$

$$\to 0.\ (n\to\infty\ 时)$$

其中 K 为正常数. 从而(a)被满足. 于是由定理 3 知，当 $p\leqslant 2$ 时，Z 是$\|X-\theta\|^2$ 的可容许估计.

参 考 文 献

[1] Berger, J. O., Lu Kunliang: Estimation of means: the estimated loss approach, *Sino-American Statistical Meeting Contributed Papers*. 1987, 20—22.

[2] 邹国华，周亚光：Poisson 分布均值的估计(待发表)

[3] Brown, L. D., Hwang, J. T.: A unified admissibility proof. *Statistical Decision Theory and Related Topics III*, 1(1982) 205—230.

ADMISSIBILITY FOR LOSS ESTIMATION

ZOU GUOHUA (*Jingdezhen Ceramic Institute*)   ZHOU GUANGYA (*Jilin University*)

In this paper, the sufficient conditions for the admissibility of loss estimators of usual estimators are given for the normal and Poisson cases. As an application, we obtain the Johnstone's result(see[1]).