应用概率统计　第八卷
第二期　1992年5月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics Vol. 8 No. 2. May, 1992

非紧空间平衡态的动态过程的存在性*

袁　成　桂

(北京师范大学，北京，100088)

摘　　要

本文给定一个非紧空间的 Hamiltonian 量，然后构造一个适当的动力系统，使得有限维 Gibbs 态的极限 Gibbs 态是这个系统的可逆测度，从而是这个系统的不变测度.

§1. 引言和符号

平衡态的定义见[1]. 在[1]的导言中写到："要识别平衡态的定义是正确的，唯一的现实途径是构造出适当的动力系统，并且验证所假定的平衡态恰好是这个系统的不变测度". 由此看来，构造已给 Hamiltonian 量的动态过程是一值得研究的问题. [2]中对一些特殊模型进行了研究，[3]中对 $\{0, 1\}^s$ 上有势的模型给出了一般性结果. [2]，[3]的研究都是在紧空间上进行的，非紧空间上在这方面的研究目前很少见到. 本文的主要目的是给定一个非紧空间的 Hamiltonian 量，然后构造一个适当的动力系统，使得有限维 Gibbs 态的极限 Gibbs 态是这个系统的可逆测度，从而是这个系统的不变测度.

本文所给的非紧空间的平衡态刻划如下：

设 $s=z^d$, $d\geqslant 2$, $\forall u\in s$. $X_u\triangleq R^n$, R^n 为 n 维欧氏空间.

$$E\triangleq\coprod_{u\in s}X_u,\ \forall\Lambda\subset s.\ E(\Lambda)\triangleq\prod_{u\in\Lambda}X_u.$$

X_u 上的距离定义为欧氏距离为 ρ_u:

$$\rho_u(x_u, y_u)=|x_u-y_u|,\quad \forall x_u, y_u\in X_u$$

$\mathscr{F}_u$ 表示 X_u 的 Borel σ-域. 设 $\{\alpha(u): u\in s, \alpha(u)\geqslant 0, \forall u\in s\}$ 是可和数列，定义 E 上的距离：

$$\rho(x, y)\triangleq\sum_{u\in s}(\rho_u(x_u, y_u)\wedge 1)\alpha(u),\ \forall x, y\in E \tag{1.1}$$

$$\forall\Lambda\subset s.\ \mathscr{F}_0(\Lambda)\triangleq\prod_{u\in\Lambda}\mathscr{F}_u,\ \mathscr{F}_u\triangleq\mathscr{F}_0(s),$$

由(1.1)知，$\mathscr{F}$ 是 E 上的 Borel σ-域. $\mathscr{S}$ 表示 s 的有限子集的全体，$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\mathscr{F}(\Lambda)\triangleq\{A\times E(s\backslash\Lambda): A\in\mathscr{F}_0(\Lambda)\}$ 称为以 Λ 为底的柱集类，$\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}}\mathscr{F}(\Lambda)$为 E 的所有柱集类.

$\forall\Lambda\in\mathscr{S}\backslash\{\phi\}$, $x\in E$, $A\in\mathscr{F}_0(\Lambda)$, 设 $c(\Lambda, x, A)$为转移概率速度测度，它所对应的无穷的小母元如下：

本文1988年10月25日收到，1991年5月22日收到修改稿.

* 本文获国家教委自然科学基金及博士点基金资助.

$$\Omega f(x)=\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}\backslash\{\phi\}}\int_{E(\Lambda)}c(\Lambda x,\ dy_\Lambda)[f(y_\Lambda\times x_{s\backslash\Lambda})-f(x)] \tag{1.2}$$

用 $b\mathscr{B}$ 表示 E 上的全体有界 Borel 可测函数，$b\mathscr{B}$ 在上确界范数 $\|\cdot\|$ 下成为 Banach 空间，用 bcly(E)表示 E 中所有有界的连续柱函数，bcly(E)在 $\|\cdot\|$ 下的闭包记为 W，从而 W 是 $b\mathscr{B}$ 中闭的线性子空间，因而 W 亦为 Banach 空间.

$\forall f\in b\mathscr{B},\ u\in s$，定义

$$\Delta_f(u)\triangleq\sup\{|f(y_u\times x_{s\backslash u})-f(x)|:\ y_u\in X_u,\ x\in E\}\|f\|\triangleq\sum_{u\in s}\Delta_f(u). \tag{1.3}$$

$$\forall\Lambda\in\mathscr{S}\backslash\{\phi\},\ c_n\triangleq\sup\{c(\Lambda,\ x,\ E(\Lambda)):\ x\in E\} \tag{1.4}$$

$\forall\Lambda\in\mathscr{S}\backslash\{\phi\},\ u\in s$，令

$$c_n(u)\triangleq\sup\{\|c(\Lambda,\ x_{s\backslash u}\times y_u,\ \cdot)-c(\Lambda,\ x,\ \cdot)\|_\Lambda;\ x\in E,\ y_u\in X_u\} \tag{1.5}$$

其中 $\|\cdot\|_\Lambda$ 表示在 $\mu(E(\Lambda))$中的全变差

$$\gamma(x,\ u)\triangleq\begin{cases}\sum\limits_{\Lambda\ni x}c_\Lambda(u) & x\neq u\\ 0 & x=u.\end{cases}\quad x,\ u\in s \tag{1.6}$$

$$l_1(s)\triangleq\{\beta;\ \beta;\ s\to R.\ \|\beta\|_{l_1}\triangleq\sum_{u\in s}(\beta(u)|<\infty\} \tag{1.7}$$

在 $l_1(s)$上定义算子 Γ：

$$(\Gamma\beta)(u)\triangleq\sum_{v\in s}\beta(v)\gamma(v,\ u),\ \beta\in l_1(s),\ u\in s \tag{1.8}$$

此外我们还定义

$$M\triangleq\sup\{\sum_{\Lambda\ni v}\sum_{u\neq v}c_\Lambda(u);\ v\in s\}=\sup\{\sum_{u\in s}\nu(v,\ u),\ v\in s\}$$

$$\varepsilon\triangleq\inf_{u\in s}\ \inf_{\substack{x_1(u)\neq x_2(u)\\ x(s\backslash u)=x_2(s\backslash u)}}\ \sum_{\Lambda\ni u}[c(\Lambda,\ x_1,\ \{y;\ y(u)=x_2(u)\})+c(\Lambda,\ x_2,\ \{y;\ y(u)=x_1(u)\})]$$

当测度 $c(\Lambda,\ x,\ A)$换成 $c^{(N)}(\Lambda,\ x,\ A)$时，上述定义的 $\Omega,\ c_\Lambda,\ c_\Lambda(u),\ \gamma(x,\ u),\ \Gamma,\ M,\ \varepsilon$ 分别换成 $\Omega^{(N)},\ c_\Lambda^{(N)},\ c_\Lambda^{(N)}(u),\ \gamma^{(N)}(x,\ u),\ \Gamma^{(N)},\ M^{(N)},\ \varepsilon^{(N)}$.

§2. 主要定理的陈述

在 E 上，我们给定 Hamiltonian 如下：

$$H(x)\triangleq\sum_{|u-v|=1}|x_u-x_v|^2+\sum_{u\in s}\Phi(x_u),\ \forall x\in E \tag{2.1}$$

$\forall N$ 为自然数，定义商群 $Z_N\triangleq Z^d/NZ^d,\ E_N\triangleq\prod_{u\in Z_N}x_u$ 周期 Hamiltonian 量为：

$$P_N^P(x)\triangleq\sum_{\substack{|u-v|=1\\ u,v\in Z_N}}|x_u-x_v|^2+\sum_{u\in Z_N}\Phi(x_u),\ \forall x\in E \tag{2.2}$$

周期边界的有限维 Gibbs 态定义为：

$$\mu_N(dx)\triangleq\exp[-\beta H_N^P(x)]dx\Big/\int_{E_N}\exp[-\beta H_N^P(x)]dx,\ \forall\beta>0 \tag{2.3}$$

我们假定 $\forall\beta>0$，有

$$c_\beta(\Phi)\triangleq\int_{R^n}\exp[-\beta\Phi(x)]dx<\infty \tag{2.4}$$

当上式成立时，由[4]的定理(3.1)，$\forall\beta>0$，$\{\mu_N(dx)\}_{N=1}^\infty$ 是相对紧的，从而存在一串子列，这里不妨设为本身，及 $\mu(dx)$，使 $\mu_N(dx)\Rightarrow\mu(dx)$，$\mu(dx)$为 Gibbs 态.

下面给出转移概率速度测度，我们认为在同一时刻只在单个坐标发生变化.

$$\forall x\in E,\quad A\in\mathscr{F}_0(u)$$

$$c(u,\ x,\ A)\triangleq\int_A \exp[-\beta\sum_{|u-v|=1}|x_u-x_v|^2-\beta\Phi(x_u)]\,dx_u \tag{2.5}$$

$$c^{(N)}(u,\ x,\ A)\triangleq\begin{cases}\int_A \exp[-\beta\sum_{|u-v|=1}|x_u-x_v|^2-\beta\Phi(x_u)]dx_u, & u\in Z_N\\ 0 & u\overline{\in} Z_N\end{cases} \tag{2.6}$$

引理 2.1 由(2.5), (2.6)所定义的 $c(u,\ x,\ A)$, $c^N(u,\ x,\ A)$是转移概率速度测度.

$c(u,\ x,\ A)$, $c^{(N)}(u,\ x,\ A)$对应的无穷小母元为:

$$\begin{aligned}\Omega f(x)&=\sum_{u\in s}\int_{x_u}c(u,\ x,\ dy_u)[f(x_{s\setminus u}\times y_u)-f(x)]\\&=\sum_{u\in s}\int_{x_u}\exp[-\beta\sum_{|u-v|=1}|y_u-x_v|^2-\beta\Phi(y_v)][f(x_{s\setminus u}\times y_u)-f(x)]dy_u\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(N)}f(x)&=\sum_{u\in s}\int_{x_u}c^{(N)}(u,\ x,\ dy_u)[f(x_{s\setminus u}\times y_u)-f(x)]\\&=\sum_{u\in s}\int_{x_u}\exp[-\beta\sum_{\substack{|u-v|=1\\ v\in Z_N}}|y_u-x_v|^2-\beta\Phi(y_u)][f(x_{s\setminus u}\times y_u)-f(x)]dy_u\end{aligned} \tag{2.9}$$

定义 $\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}(\Omega^{(N)})\triangleq$ boly$\mathbf{1}E$), 主要定理陈述如下:

定理 2.2 在空间 E 上, Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 所对应的马氏过程存在唯一. 记为 $P(t,\ x,\ A)$. $\Omega^{(N)}$ 所对应的马氏过程存在唯一. 记为 $P^{(N)}(t,\ x,\ A)$.

定理 2.3 假设(2.4)成立, 那么 $\mu_N(dx)\Rightarrow\mu(dx)$, $N\to\infty$, $\mu(dx)$为 Gibbs 态, 则 $\mu(dx)$ 为 $P(t,\ x,\ A)$的可逆测度.

§3. 定理的证明

一、半群的存在性:

定理 3.1 在 W 上, 存在唯一的连续压缩半群 $P(t)$, 它的无穷小母元是(2.8)所定义的 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$、存在唯一的连续压缩半群 $P^{(N)}(t)$, 它的无穷小母元是(2.9)所定义的 $\Omega^{(N)}$.

注 定理中的 W 为 §1 中的 W, 以下均在 §1 中 W 上进行讨论.

注意到 $\overline{\Omega}^{(N)}=\Omega^{(N)}$, 我们只需对 Ω 进行证明. 引理 3.2: Ω 具有下列性质:

$$\mathscr{D}(\Omega)\text{在 } W \text{ 中稠} \tag{3.1}$$

$$\forall f\in\mathscr{D}(\Omega),\ \lambda\geqslant 0,\ \inf_{x\in E}\{f(x)\}\geqslant\inf_{x\in E}\{f(x)-\lambda\Omega f(x)\} \tag{3.2}$$

$$|\in\mathscr{D}(\Omega),\ \Omega|=0 \tag{3.3}$$

此外, 由(3.2)可推出,

$$\forall f\in\mathscr{D}(\Omega),\ \lambda\geqslant 0,\ \text{令 } g\triangleq f-\lambda\Omega f,\ \text{则 } \|f\|\leqslant\|g\|. \tag{3.4}$$

证明 只需证明(3.2), $\forall f\in\mathscr{D}(\Omega)$, 则存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\inf\{f(x):\ x\in E\}$$

而 $\Omega f(x_n)=\sum_{u\in s}\int_{x_n}\exp[-\beta\sum_{|u-v|=1}|y_u-(x_n)_v|^2-\beta\Phi(y_u)][f(x_n)_{s\setminus u}\times y_u)-f(x_n)]dy_u$

由 $\exp[-\beta\Phi(x)]$ 可积及 Faton 引理, 我们可证明存在子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,\Omega f(x_{n_k})\geqslant 0,$$

从而：

$$\inf\{f(x):x\in E\}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\geqslant\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})-\lambda\,\underline{\lim_{k\to\infty}}\,\Omega f(x_{n_k})$$

$$=\overline{\lim_{k\to\infty}}[f(x_{n_k})-\lambda\Omega f(x_{n_k})]\geqslant\inf\{f(x)-\lambda\Omega f(x):x\in E\}.$$

引理 3.3 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 存在，且仍具有性质(3.1)—(3.4) $I-\lambda\bar{\Omega}$ 的值域是 W 中的闭集，

$$R(I-\lambda\bar{\Omega})=\overline{R(I-\lambda\Omega)}.$$

证明 见[5]，第二章§3．引理 2.

引理 3.4 $\forall f\in\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}(\Omega^{(N)})$，$\lambda\geqslant 0$，令

$$g\triangleq f-\lambda\Omega f,\ g^{(N)}\triangleq f-\lambda\Omega^{(N)}f,\ \forall u\in s,$$

则有：

$$\Delta_f(u)(1+\lambda s)\leqslant\Delta_g(u)+\lambda\sum_{\substack{x\neq u\\ x\in s}}\gamma(x,u)\Delta_f(x)\tag{3.5}$$

$$\Delta_f(u)(1+\lambda s^{(N)})\leqslant\Delta_{g^{(N)}}(u)+\lambda\sum_{\substack{x\neq u\\ u\in s}}\gamma^{(N)}(x,u)\Delta_f(x)\tag{3.6}$$

证明 只证(3.5)，(3.6)的证明类似．当 $\Delta_f(u)=0$ 时，(3.5)显然成立，下设 $\Delta_f(u)>0$，有

$$\Delta_f(u)=\sup\{|f(\zeta\times\eta_{s\setminus u})-f(\eta)|:\eta\in E,\ \zeta\in x_u\}$$

$$=\sup\{f(\zeta\times\eta_{s\setminus u})-f(\eta),\eta\in E,\zeta\in x_u\}\vee\sup\{f(\eta)-f(\zeta\times\eta_{s\setminus u}),\eta\in E,\zeta\in x_u\}$$

不妨设 $\Delta_f(u)=\sup\{f(\zeta\times\eta_{s\setminus u})-f(\eta):\ \eta\in E,\ \zeta\in x_u\}$，则存在 $\zeta^{(n)}\in x_u$，$\eta^{(n)}\in E$，$n=1,2,\cdots$ 使得：

$$\Delta_f(u)=\lim_{n\to\infty}[f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})]$$

因此：

$$\Delta_f(u)\leqslant\Delta_g(u)+\lambda\overline{\lim_{n\to\infty}}[\Omega f(\zeta^{(n)}\times\zeta^{(n)}_{s\setminus u})-\Omega f(\eta^{(n)})]\tag{3.7}$$

而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[\Omega f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-\Omega f(\eta^{(n)})]$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[\sum_{\substack{v\in s\\ v\neq u}}\int_{x_v}c(v,\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},d\xi)[f(\zeta^{(n)}\times\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus\{u\cup v\}})-f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})]$$

$$-\sum_{\substack{v\in s\\ v\neq u}}\int_{x_v}c(v,\eta^{(n)},d\xi)[f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})]\Big]$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[\int_{x_u}c(u,\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},d\xi)[f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})]$$

$$-\int_{x_u}c(u,\eta^{(n)},d\xi)[f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})]\Big]$$

$$\triangleq I+II$$

$$I\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{v\in s}\int_{x_v}[c(v,\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},d\xi)-c(v,\eta^{(n)},d\xi)][f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus v})-f(\eta^{(n)})]$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\substack{v\in s\\ v\neq u}}\int_{x_v}c(v,\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},d\xi)[f(\zeta^{(n)}\times\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus\{u\cup v\}})-f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})]$$

$$-(f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)}))]$$

$$\leqslant\sum_{v\subset s}c_{\{v\}}(u)\Delta_f(v)$$

$$
\begin{aligned}
II \leqslant & -\varliminf_{n\to\infty}\Big[\int_{x_u} c(u,\ \zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},\ d\xi)\,[f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})] \\
& +\int_{x_u} c(u,\ \eta^{(n)},\ d\xi)\,[f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})]\Big] \\
\leqslant & -\varliminf_{n\to\infty}[c(u,\ \zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},\ \{\xi:\xi(u)=\eta^{(n)}(u)\}) \\
& +c(u,\ \eta^{(n)},\ \{\xi:\ \xi(u)=\xi^{(n)}(u)\})]\times[f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})] \\
& -\varliminf_{n\to\infty}\int_{x_u\setminus\{\xi:\xi(u)=\zeta^{(n)}(u)\}} c(u,\ \eta^{(n)},\ d\xi)\,[f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})] \\
& -\varliminf_{n\to\infty}\int_{x_u\setminus\{\xi:\xi(u)=\eta^{(n)}(u)\}} c(u,\ \zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},\ d\xi)\,[f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\xi\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})] \\
\leqslant & -\varliminf_{n\to\infty}[c(u,\ \zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u},\ \{\xi:\xi(u)=\eta^{(n)}(u)\}) \\
& +c(u,\ \eta^{(n)},\ \{\xi:\ \xi(u)=\xi\})]\times[f(\zeta^{(n)}\times\eta^{(n)}_{s\setminus u})-f(\eta^{(n)})] \\
\leqslant & -\varepsilon\Delta_f(u)
\end{aligned}
$$

所以：

$$\Delta_f(u)\leqslant\Delta_g(u)+\lambda\sum_{v\neq u}c_{\langle v\rangle}(u)\,\Delta_f(u)-\lambda\varepsilon\Delta_f(u)$$

即：

$$(1+\lambda\varepsilon)\Delta_f(u)\leqslant\Delta_g(u)+\sum_{x\neq u}\gamma(x,\ u)\Delta_f(x).$$

(3.5)得证.

引理 3.5 设 Ω, $\Omega^{(N)}$ 分别是(2.8)，(2.9)所定义的无穷小母元，则 $M<\infty$, $M^{(N)}<\infty$, 且

$$(\Gamma\beta)(u)\triangleq\sum_{x\in s}\beta(x)\gamma(x,\ u),\quad u\in s$$

为 B 空间 $l_1(s)$ 上的一个具有范数 M 的正算子，若 f, $g\in\mathscr{D}(\Omega)$, $f-\lambda\Omega f=g$, 且 $\lambda\geqslant0$ 满足条件：$\lambda M/1+\lambda\varepsilon<1$, 则：

$$\Delta_f(u)\leqslant[(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g$$

关于 $\Gamma^{(N)}$ 有相应结论，并由此可推出 $R(I-\lambda\Omega)$ 在 W 中稠.

证明：参见[5]，第一章§4.

定理 3.1 的证明：由上述引理及[5]中的半群存在性定理. 立即可得.

Ω, $\Omega^{(N)}$ 对应的半群分别记作 $P(t)$, $P^{(N)}(t)$, 下面我们用半群来构造过程.

二、过程的构造

引理 3.6：$P(t)$, $P^{(N)}(t)$ 是 W 上的正的线性算子，即 $\forall f\in W$, $f\geqslant0$, 有

$$P(t)f\geqslant0,\ P^{(N)}(t)f\geqslant0.$$

证明：参见[6].

定理 3.7：$P(t)$, $P^{(N)}(t)$ 所对应的马氏过程存在，由于 Ω, $\Omega^{(N)}$ 所对应的半群唯一，从而它们所对应的马氏过程唯一.

证明：只对 $P(t)$ 进行证明，$P^{(N)}(t)$ 类似可证. 先固定 t 和 $x\in E$, 若 $T=\{u_1,\ \cdots,\ u_n\}$ 是 s 的任一有限子集，我们用 $\mathscr{C}_0^T$ 表示只依赖于 T 中坐标的具有紧支撑的连续函数全体，令 $\mathscr{C}_0=\bigcup\limits_{T\subset\mathscr{S}}\mathscr{C}_0^T$, 由 W 的定义知 $W\supset\mathscr{C}_0^T$, 可视 $f\to P(t)f(x)$ 为 $\mathscr{C}_0^T$ 上的正的线性泛函. 于是由 Riesz 表现定理知，存在 $\mathscr{F}_0(T)\times E(s\setminus T)$ 上的非负测度 π_T, 使得：

$$\pi_T(f)=P(t)f(x),\ f\in\mathscr{C}_0^T\tag{3.8}$$

在 $E^{(T)}$ 上取紧集列 $E^{(m)}\uparrow E^{(T)}$, $m\to\infty$, 并令

$$f_m(x)=\frac{m\rho_T(x,\ E^{(\ )}\backslash E^{(m)})}{1+m\rho_T(x,\ E^{(\ )}\backslash E^{(m)})},\quad x\in E^{(\ )}$$

显然$f_m\uparrow 1$. 若$\tilde{T}\supset T$, 设$f\in\mathscr{C}_0^T$, 则$f\in\mathscr{C}_0^{\tilde{T}}$, 从而$ff_m\in\mathscr{C}_0^{\tilde{T}}$. 如果$f\geqslant 0$, 则$ff_m\uparrow f$, 由于$ff_m$, f均连续且具有相同的紧支撑, 从而由Dini定理知: ff_m关于m一致收敛于f. 由半群的压缩性, 有:

$$\pi_{\tilde{T}}(ff_m)=P(t)(ff_m)(x)\to P(x)f(x)=\pi_T(f),\ m\to\infty$$

从而

$$\pi_{\tilde{T}}(f)=\pi_T(f)\tag{3.9}$$

显然$\forall f\in\mathscr{C}_0^T$, (3.9)也成立. 因此$\{\pi_T:\ T\in\mathscr{S}\}$是$E$上的一族相容概率族. 于是由测度扩张定理知, 存在E上的非负有限测度$P(t,\ x,\ \cdot)$, 使得:

$$P(t)f(x)=f(y)P(t,\ x,\ dy),\quad f\in\mathscr{C}_0\tag{3.10}$$

由控制收敛定理及半群的压缩性知, (3.10)$\forall f\in W$也成立. 另外由$\Omega|=0$知, $P(t,\ x,\ E)=1$. $\forall f\in W$, 由于$P(t)f(x)$是$\mathscr{F}$可测函数, 从而$\forall A\in\mathscr{F}$, $P(t,\ x,\ A)$是x的$\mathscr{F}$可测函数. 由$P(t)$的半群性, 可知$P(t,\ x,\ A)$满足K-C方程, 从而$P(t,\ x,\ A)$是转移概率测度.

由于E是Polish空间, 故可以构造以$P(t,\ x,\ \cdot)$为转移函数的马氏过程. 定理的后一部分显然成立, 定理得证.

由上述可知, 我们证明了定理2.2.

三、定理2.3的证明

引理3.8: $\forall f(x)$, $g(x)\in b\mathscr{B}$, 有下式成立:

$$\int_E(f\cdot(\Omega^{(N)}g))(x)\,\mu_N(dx)=\int_E(g\cdot(\Omega^{(N)}f))(x)\mu_N(dx).\tag{3.11}$$

证明: 在E_N外, 把$\mu_N(dx)$看成集中在单点集上, 从而我们如果能证明把$\mu_N(dx)$看成E_N上的测度, $f(x)$, $g(x)$是E_N上的有界可测函数, 下式成立即可:

$$\begin{aligned}&\sum_{u\in Z_N}\int_{E_N}f(x)\int_{x_u}c^{(N)}(u,\ x,\ dy)g(x_{Z_N\backslash u}\times y_u)\mu_N(dx)\\&=\sum_{u\in Z_N}\int_{E_N}g(x)\int_{x_u}c^{(N)}(u,\ x,\ dy)f(x_{Z_N\backslash u}\times y_u)\mu_N(dx)\end{aligned}\tag{3.12}$$

设$Z_N=\{u_1,\cdots,\ u_m\}$, 由单调类定理知: 只需证明$\forall A_i$, 设$B_i\in\mathscr{F}(u_i)$, $f(x)=I^{(x)}_{A_1\times\cdots\times A_m}$, $g(x)=I^{(x)}_{B_1\times\cdots\times B_m}$(3.12)成立即可. 直接代入计算即知此时成立. 引理得证.

定理3.9 μ是$P(t,\ x,\ \cdot)$的可逆测度, 即下式$\forall f(x)$, $g(x)$是E上的有界连续函数成立.

$$\int_E f(x)\int_E P(t,\ x,\ dx)g(y)\mu(dx)=\int_E g(x)\int_E P(t,\ x,\ dy)f(y)\mu(dx).\tag{3.13}$$

证明 只需证明$\forall f$, $g\in\mathrm{bcly}(E)$, (3.13)成立.

由于$\Omega^{(N)}f\to\Omega f$, $N\to\infty$, 因此由[5]知, $P^{(N)}(t)f\to P(t)f$, $N\to\infty$, 又

$$\int P(t,\ x,\ dy)g(y)\in W,\quad \int P(t,\ x,\ dy)\,f(y)\in W,$$

从而均有界连续, 其次下面式子成立

$$\begin{aligned}&\left|\int g(x)\int P(t,\ x,\ dy)f(y)\mu(dx)-\int f(x)\int P(t,\ x,\ dy)g(y)\mu(dx)\right|\\&\leqslant\left|\int g(x)\int P(t,\ x,\ dy)\,f(y)\mu(dx)-\int g(x)\int P(t,\ x,\ dy)\,f(y)\mu_N(dx)\right|\end{aligned}$$

$$+\left|\int g(x)\int P(t, x, dy)f(y)\mu_N(dx)-\int g(x)\int P^{(N)}(t, x, dy)f(y)\mu_N(dx)\right|$$
$$+\left|\int g(x)\int P^{(N)}(t, x, dy)f(y)\mu_N(dx)-\int f(x)\int P^{(N)}(t, x, dy)g(y)\mu_N(dx)\right|$$
$$+\left|\int f(x)\int P^{(N)}(t, x, dy)g(y)\mu_N(dx)-\int f(x)\int P(t, x, dy)g(y)\mu_N(dx)\right|$$
$$+\left|\int f(x)\int P(t, x, dy)g(y)\mu_N(dx)-\int f(x)\int P(t, x, dy)g(y)\mu(dx)\right| \quad (3.14)$$

由引理 3.8 知，上式不等号左端第三项等于 0，又 $\forall \varepsilon>0$，$\exists M_1$，当 $N>M_1$ 时，

$$\int P^{(N)}(t, x, dy)f(y)-\int P(t, x, dy)f(y)<\varepsilon$$
$$\int P^{(N)}(t, x, dy)g(y)-\int P(t, x, dy)g(y)<\varepsilon$$

又由测度的弱收敛性知，(3.14)不等号右端第一，五项当 $N\to\infty$ 时，趋于零. 从而此时(3.13)成立. $\forall f$ 有界连续，令 $f_\Lambda(x)=f(x_\Lambda\times\theta_{s\setminus\Lambda})$，$\Lambda\in\mathscr{S}$，则 $f_\Lambda\in \mathrm{bcly}(E)$，且 $f_\Lambda(x)\to f(x)$，由控制收敛定理知，(3.13)此时也成立. 定理证毕.

由上述可知，我们证明了定理 2.3.

致谢，本文是在陈木法教授指导下完成的，特此致谢.

参 考 文 献

[1] C. Preston，随机场，北京师范大学出版社 (1982)，严士健，陈木法，丁万鼎译

[2] Ligget, T, M. *interacting particle systems*, Springer-Verlag 1985

[3] 唐宋正 势与自旋变相过程，博士论文北京师范大学数学系.

[4] S. B. Shlosman, The method of reflection positivity in the mathematical theory of first-order phase thransition, *Russian Math. Surveys*. **41**:3 (1986)

[5] 严士健 *无穷质点马氏过程* 北京师范大学出版社.

[6] 王梓坤 *随机过程论* 科学出版社 1978

[7] 陈木法 *跳过程与粒子系统* 北京师范大学出版社，1986

THE EXISTENCE OF HAMILTONIAN DYNAMIC PROCESSES

YUAN CHENGGUI

(Beijing Normal University)

In this paper, by using Hille–Yosida theorem, we construct dynamic processes whose Hamiltonian is given by

$$H(x)=\sum_{|x-v|^2=1}|x_u-x_v|^2+\sum_{u\in s}\Phi(x_u);$$

where $H(x)$ is defined on a non-compact $(R^d)^s$. We prove that the limit of Hamiltonian finite dimensions Gibbs state is a reversible measure of the constructed Markov processes.