

综合报告

回归模型中异方差或变离差检验问题综述 *

韦博成¹ 林金官^{1,2} 吕庆哲³

(¹ 东南大学数学系, 南京, 210096; ² 江苏教育学院数学系, 南京, 210013; ³ 国家统计局统计研究所, 北京, 100826)

摘 要

回归模型的异方差或变离差检验是统计诊断的重要课题. 本文系统介绍了普通回归模型、广义回归模型和基于纵向数据的随机效应或自相关回归模型的异方差检验或变离差检验的研究概况和最新进展; 同时介绍了作者关于非线性回归模型的相应工作, 最后指出了若干有待进一步研究的问题.

关键词: 非线性回归, 广义非线性模型, 指数族分布, 异方差, 变离差, 偏大离差, 随机效应, 纵向数据, 似然比检验, score 检验, 自相关性, 统计诊断.

学科分类号: O212.1.

§1. 模型与问题

在经典的回归分析中, 观测值的方差齐性是一个很基本的假定, 在此假定下, 方可进行常规的统计推断. 如果方差非齐且未知, 则回归分析将遇到诸多问题, 因而在统计诊断中, 观察数据的方差齐性检验是一个十分重要的问题. 普通回归模型的一般形式是:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \beta) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

其中 β 为 p 维回归系数向量, σ^2 为方差参数. 若 $f(\mathbf{x}_i, \beta) = \mathbf{x}_i^T \beta$, 则模型 (1) 为线性回归模型. 但实际上, 对于比较复杂的数据, y_i 的方差可能与 i 有关, 即 $\text{Var}(y_i) = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, 此时称模型 (1) 存在异方差.

对于异方差回归模型, 由于未知参数有 $n+p$ 个, 参数估计的问题变得较为复杂, 甚至可能是“不可识别”的. Hartley & Jayatilake (1973) 在 σ_i 严格正值的约束条件下 (即 $\sigma_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$), 对于正态线性回归模型, 求出了参数的极大似然估计. 但在实用上, 人们很少采用这种不等式约束的求解方法. 目前比较流行的方法是把 σ_i^2 参数化或非参数化, 即假设 $\sigma_i^2 = w(\mathbf{z}_i, \gamma)$ (特别是假定 $\log \sigma_i^2 = \mathbf{z}_i^T \gamma$, 其中, \mathbf{z}_i 为协变量) 或 $\sigma_i^2 = h(t_i)$, 通过估计参数 γ 或函数 $h(\cdot)$ 得到 σ_i^2 (Mak, 1992; Carrall & Ruppert, 1989; Eubank & Thoms, 1993; Verbyla, 1993; Chan & Mak, 2001 等). 显然, 异方差模型比经典的方差齐性模型复杂得多; 迄今为止还没有一致认可的处理方法. 在实用上, 人们还是偏爱方差齐性的回归模型. 数据变换方法 (Seber & Wild, 1989; 韦博成等, 1991) 的一个重要目的就是使变换后的数据具有方差齐性. 因此, 对于一组比较复杂的数据, 如果要用模型 (1) 进行拟合, 通常要进行方差齐性检验, 如果方差齐性假设成立, 则可基于模型 (1) 进行常规的统计分析. 如果方差非齐, 则可考虑进行数据变换或其它处理方法. 因此, 检验数据的异方差是否存在, 是处理回归问题的第一步, 它在理论上和应用上都是十分重要的问题.

本文主要介绍各种回归模型的异方差或变离差检验的方法及最新动态. 限于篇幅, 异方差回归的参数估计等问题, 本文将不作进一步介绍. 普通回归模型的异方差性检验可表示为:

$$H_0: \sigma_i^2 \equiv \sigma^2; \quad H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma^2. \quad (2)$$

* 国家社会科学基金 (02BTJ001) 资助项目.

本文 2002 年 8 月 12 日收到, 2002 年 9 月 26 日收到修改稿.

下面进一步考虑广义线性 (GLM) 和广义非线性模型 (GNLM) (McCullagh & Nelder, 1989; Wei, 1998), 它们可表示为:

$$g(\mu_i) = f(\mathbf{x}_i, \beta), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

其中, $g(\cdot)$ 是已知的单调联系函数, $\mu_i = E(y_i)$ 且 y_i 服从指数族分布, 其密度函数为:

$$p(y_i) = \exp \left\{ \sigma_i^{-2} [y_i \theta_i - b(\theta_i) - c(y_i)] - \frac{1}{2} a(y_i, \sigma_i^2) \right\}, \quad (4)$$

若 $f(\mathbf{x}_i, \beta) = \mathbf{x}_i^T \beta$, 则为广义线性模型. 通过简单推导可知 $\mu_i = E(y_i) = b(\theta_i)$, $\text{Var}(y_i) = \sigma_i^2 \ddot{b}(\theta_i)$, 其中 σ_i^2 称为离差参数. 易见在广义回归模型中, 方差 $\text{Var}(y_i)$ 总是非齐的 ($\ddot{b}(\theta_i) = 1$ 的正态情形除外), 因而不存在异方差检验问题. 但其方差问题仍然存在, 与普通的回归模型一样, 在 GLM 和 GNLM 中, 应有 $\text{Var}(y_i) = \sigma_i^2 \ddot{b}(\theta_i)$; 如果 σ_i^2 未知且不相等, 与前文模型 (1) 的分析类似, 模型 (3) 统计推断会遇到诸多问题; 迄今为止还没有一致认可的处理方法. 因而在广义回归模型的统计推断中, σ_i^2 恒等于 σ^2 也是一个基本假定. $\sigma^2 \ddot{b}(\theta_i)$ 称为 y_i 的名义离差 (nominal dispersion), $\text{Var}(y_i)$ 偏离名义离差则称模型存在变离差 (varying dispersion), 广义回归模型的变离差检验也是一个重要问题. 对 GLM 和 GNLM 的变离差检验问题, 首先应考虑离差参数 σ_i^2 的变异 (Wei et al, 1998), 即 (2). 该情形是 Cook & Weisberg (1983), Simonoff & Tsai (1994) 和韦博成 (1995) 所研究的普通回归模型异方差检验问题的推广. 除了离差参数的变异外, 许多文献 (Cox, 1983; Smyth, 1989; Breslow, 1990; Dean, 1992; Smith & Heitjan, 1993) 还认为随机效应对 $g(\mu_i)$ 的影响也是产生变离差的重要原因, 详见本文第 3 节和第 4 节. 因而检验模型的变离差可归结为检验 σ_i^2 的恒等性或随机效应的存在性. Zhang & Weiss (2000) 把由随机效应的存在而产生的模型的异方差称为不可解释的非齐性 (unexplained heterogeneity), 而将 σ_i^2 表示成某协变量的函数时的情形称为可解释的非齐性 (explainable heterogeneity).

§2. 线性非线性回归模型的异方差检验

关于线性回归模型的异方差检验, 早期的工作可见 Harrison (1965), Glejser (1969), Seber (1977), Bickel (1978), Harrison & McCabe (1979), Carroll & Ruppert (1981). Breusch & Pagan (1979) 在 $\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp\{\mathbf{z}_i^T \gamma\}$ (对数线性方差函数模型) 假设下, 利用 Lagrange 乘数检验 (即 score 检验) 研究了线性回归模型的异方差检验. 但直到 Cook & Weisberg (1983) 在 score 统计量的基础上, 建立了诊断异方差的检验以后, 利用 score 统计量方法研究异方差的检验才逐步引起了人们的重视, 并被推广到许多模型. score 统计量的最大优点是, 人们只需要计算在原假设条件下 (即方差齐性的条件下) 参数的极大似然估计, 而不需要计算备择假设下 (即异方差条件下) 参数的极大似然估计, 而且其渐近分布与似然比统计量相同, 检验的功效也相当 (Cox & Hinkley, 1974; 韦博成等, 1991).

值得一提的是, Cook & Weisberg (1983) 使用了一个比 Breusch & Pagan (1979) 更广泛的假定:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 w(\mathbf{z}_i, \gamma), \quad (5)$$

其中, γ 为结构参数, $w(\mathbf{z}_i, \gamma)$ 称为权函数, 且存在 γ_0 , 使 $w(\mathbf{z}_i, \gamma_0) = 1$, 对一切 i 成立. Cook & Weisberg (1983) 给出了利用图形方法构造方差权函数的可能形式. 若模型的残差 (或学生化残差) 对因变量 y_i 或因变量 y_i 的拟合值 $\hat{y}_i = f(\mathbf{x}_i, \hat{\beta})$ 的散点图呈喇叭状, 则 $w(\cdot, \cdot)$ 可取为 $f(\mathbf{x}_i, \beta)$ 的函数的形式; 若模型的残差 (或学生化残差) 对某协变量 \mathbf{z}_i 的散点图呈喇叭状, 则 $w(\cdot, \cdot)$ 可取为 \mathbf{z}_i 与 γ 的函数的形式, 包括对数线性模型和幂积模型: $w(\mathbf{z}_i, \gamma) = \exp\{\mathbf{z}_i^T \gamma\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^q z_{ij} \gamma_j\right\}$ 和 $w(\mathbf{z}_i, \gamma) = \prod_{j=1}^q z_{ij}^{\lambda_j}$. 这两种模型是方差参数结构化的最常用形式. 这时模型的异方差检验 (2) 即可化为一般的参数假设检验问题:

$$H_0: \gamma = \gamma_0; \quad H_1: \gamma \neq \gamma_0. \quad (6)$$

定理 1 (Cook & Weisberg, 1983) 在线性异方差模型 (1), (5) 中, 若表示 $D = [\partial w(\mathbf{z}_i, \gamma) / \partial \gamma_j]_{n \times q}$, \mathbf{u} 表示第 i 个元素是 $\hat{\varepsilon}_i^2 = (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta})^2$ 的 n 维向量, 则检验 (6) 的 score 统计量为:

$$SC_1 = \frac{1}{2\sigma^4} \left\{ \mathbf{u}^T \bar{D} (\bar{D}^T \bar{D})^{-1} \bar{D}^T \mathbf{u} \right\}_{\hat{\theta}},$$

其中, $\bar{D} = (I_n - \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T/n)D$, $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^T, \hat{\sigma}^2)^T$ 为 β, σ^2 在 H_0 成立时的极大似然估计.

在 Cook & Weisberg (1983) 的基础上, Simonoff & Tsai (1994) 利用 Cox & Reid (1987, 1993) 关于参数正交化的思想, 构造了检验异方差的调整的似然比和调整的 score 统计量, 并通过随机模拟证明其功效优于未调整的检验统计量.

定理 2 (Simonoff & Tsai, 1994) 在线性异方差模型 (1), (5) 中, 检验 (6) 的调整的 score 统计量为:

$$SC_{1A} = \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \{(\mathbf{u} + 2\hat{\sigma}^2 \mathbf{h})^T \bar{D} (\bar{D}^T \bar{D})^{-1} \bar{D}^T \mathbf{u}\}_{\hat{\theta}},$$

其中, \mathbf{h} 为矩阵 $X(X^T X)^{-1} X^T$ 的对角元素组成的向量, $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$.

对于非线性回归模型, 同样需要检验异方差. 韦博成 (1995) 给出了非线性回归模型异方差的 score 检验统计量及其调整形式, 并研究了该检验的局部影响分析. 利用随机效应方法研究模型的异方差检验, 是继方差参数结构化方法以后的另一种重要方法, 第 4 节将有专门介绍. 林金官, 韦博成 (2002 a, b) 分别利用随机系数和随机权函数方法研究了非线性回归模型的异方差检验, 得到了检验的 score 统计量. 如果模型确实存在异方差, Seber & Wild (1989) 认为可以通过数据变换 (如 Box-Cox 变换, John-Draper 变换) 来消除异方差. 当通过数据变换也不能消除异方差时, 就要对方差进行估计. Aitkin (1987), Mak (1992), Verbyla (1993), Chan & Mak (2001) 研究了回归模型中异方差存在时, 回归系数和方差函数的估计问题. 对于非线性回归模型, Carroll & Ruppert (1989, Chap. 2) 给出了几种异方差形式, 并列出了异方差回归在七个方面的应用, 同时他们用广义最小二乘方法讨论了异方差回归的估计问题. Kimura (1990) 在异方差存在的条件下, 进一步讨论了回归系数齐性的似然比和 score 检验.

当观测值与时间有关时, 数据之间往往存在序列相关 (Bates & Watts, 1988; Seber & Wild, 1989; Lindsey, 2001), 尤其是自相关性. 和普通的回归模型一样, 这时模型也存在异方差的检验问题, 但通常还要检验相关性. Durbin & Watson (1950, 1950, 1971) 在最小二乘残差的基础上, 研究了模型自相关的检验, Chi & Reinsel (1989, 1991) 研究了 AR(1) 随机效应模型的相关性检验; 胡跃清, 韦博成 (1994) 讨论了误差为一阶自回归序列的非线性回归模型的相关性检验, 得到了似然比和 score 检验统计量及它们的调整形式. 正如 Harrison & McCable (1975), Epps (1977) 所述, 自相关和异方差可能同时发生. Tsai (1986) 建立了一阶自回归误差的线性异方差回归模型:

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \beta + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_1 = e_i, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \rho e_i, \quad i \geq 2,$$

其中, $\{e_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 相互独立, $E(e_i) = 0$, $\text{Var}(e_i) = \sigma^2 w(\mathbf{z}_i, \gamma)$; 且存在 γ_0 , 使 $w(\mathbf{z}_i, \gamma_0) = 1$, 对一切 i 成立. 在该模型中, Tsai (1986) 首次讨论了异方差和相关性的同时检验: $H_0: \gamma = \gamma_0, \rho = 0$, 给出了检验的 score 统计量.

定理 3 (Tsai, 1986) 对上述线性异方差和自相关模型, 采用定理 1 中的记号, 再记 $\hat{\rho} = \sum_{i=2}^n \hat{e}_i \hat{e}_{i-1} / \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$, 则同时检验异方差和自相关性的 score 统计量为:

$$SC_3 = \frac{1}{2\hat{\sigma}^4} \{\mathbf{u}^T \bar{D} (\bar{D}^T \bar{D})^{-1} \bar{D}^T \mathbf{u}\}_{\hat{\theta}} + \frac{(n\hat{\rho})^2}{n-1}.$$

韦博成, 胡跃清 (1994) 对具有 AR(1) 误差的非线性回归模型, 研究了异方差和相关性的同时检验, 给出了似然比统计量和 score 统计量并且给出了调整的检验统计量. 刘应安, 韦博成 (2001) 对具有 ARMA(1,1) 误差的非线性回归模型, 给出了检验异方差和相关性的似然比和 score 统计量及它们的调整形式. 更一般地, Lin & Wei (2002 b) 研究了具有 AD(p) (p 阶前相关) 误差的非线性回归模型的异方差和相关性检验问题, 得到了多个检验统计量及它们的调整形式. 对于若干其他随机误差序列, 我们也作了若干研究, 如林金官, 韦博成 (2002 c) 讨论了具有 ARIMA(0,1,0) (即随机游动) 误差的非线性回归模型的异方差检验问题, 得到了 score 和调整的 score 统计量, 并推导了检验的局部近似功效函数. 刘应安, 韦博成 (2002) 讨论了具有双线性 BL(1,1,1,1) 误差的非线性回归模型的异方差和相关性检验.

§ 3. 广义回归模型的变离差检验

假设观测值 y_1, y_2, \dots, y_n 服从广义回归模型 (3), (4). 对于该模型, 正如第 1 节所述, 变离差检验也是一个十分重要的问题. Fisher (1950) 研究了 Poisson 观测序列中, 偏离期望 (即名义离差) 的显著性检验. Cox (1983) 讨论了 Poisson 回归中, 偏大离差对统计推断的影响. 广义回归模型的变离差或偏大离差的检验是近年来的热点课题, 有关的文献非常多, 例如可参见 Moran (1973), Williams (1982), Zelterman & Chen (1988), Dean & Lawless (1989), Smyth (1989), Breslow (1990), Dean (1992), Ganio & Schaffer (1992), Baksalary (1992), Portnoy (1992), Smith & Heitjan (1993), Commenges et al (1994), le Cessie et al (1995), Lambert & Roeder (1995), Commenges & Jacmin-Gadda (1997), Jones (1999), Hall & Preatgard (2001) 等等. 综观现有文献, 广义回归模型变离差和偏大离差的检验方法主要有两种, 即离差参数的参数化方法和随机效应法 (Lee & Nelder, 2000). 前者仍然如 (5), (6) 所述, 但模型对应于 (3) 式和 (4) 式. Wei et al (1998) 应用离差参数的参数化方法研究了指数族非线性回归模型的变离差检验, 得到了检验的似然比和 score 统计量以及它们的调整形式, 推广和发展了定理 1, 2 的结果.

定理 4 (Wei et al, 1998) 对连续可分 (即在 (4) 中有 $a(y_i, \sigma_i^2) = s(\sigma_i^2) + t(y_i)$) 的广义非线性变离差模型 (3), (5), 检验 (6) 的 score 统计量及其调整形式分别为:

$$SC_4 = \frac{1}{2} \hat{s}(\hat{\sigma}^2) \{ \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{D}} (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{d} \}_{\hat{\theta}},$$

和

$$SC_{4A} = \frac{1}{2} \hat{s}(\hat{\sigma}^2) \{ (\mathbf{d} + 2\hat{\sigma}^2 \mathbf{h})^T \bar{\mathbf{D}} (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{d} \}_{\hat{\theta}},$$

其中, \mathbf{d} 由 y_i 的 deviance (Wei, 1998) 组成的向量, \mathbf{h} 为矩阵 $F(F^T F)^{-1} F^T$ ($F = [\partial f(\mathbf{x}_i, \beta) / \partial \beta_j]_{n \times p}$) 的对角元素组成的向量.

随机效应法是假设模型中的某参数受到随机因素的影响, 从而导致名义离差的偏离, 然后检验这种随机影响的显著性. 利用随机效应法研究模型的变离差, 对于常见的离散型指数族分布 (二项分布、Poisson 分布、负二项分布等) 尤为必要. 因为这时它们的离差参数 $\sigma_i^2 \equiv 1$, 研究 σ_i^2 的变异问题是不可能的. 但在该类模型中, 变离差问题仍然存在, 此时模型的变离差经常表现为偏大离差 (overdispersion), 有时也表现为偏小离差 (underdispersion). 偏大离差意味着观测值的方差 $\text{Var}(y_i)$ 超过它的名义方差, 如 Poisson 分布 $P(\mu_i)$ 中, y_i 的名义方差为 $E(y_i) = \text{Var}(y_i) = \mu_i$. 造成偏大离差的原因往往是因为在数据测量中受到了随机效应的影响. Cox(1983) 首先应用随机效应研究了 Poisson 回归模型中的偏大离差问题. 这时名义上应有观测序列 $\{y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 相互独立, 且 $y_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$, $\mu_i = \mu_i(\mathbf{x}_i, \beta)$. 但实际测量中, y_i 可能受到某个随机效应序列 $\{u_i\}$ 的影响 (u_i 之间独立同分布), 从而使得原模型变成 $\{y_i | u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 相互独立, 且: $y_i | u_i \sim \text{Poisson}(u_i \mu_i)$, 这里, $E(u_i) = 1$, $\text{Var}(u_i) = \tau$, 通过简单计算有 $\text{Var}(y_i) = E(y_i) + \tau \mu_i^2 > E(y_i)$. 从而当 $\tau > 0$ 时, 即随机效应序列 $\{u_i\}$ 存在时, Poisson 回归模型存在偏大离差, 因而模型的偏大离差检验可化为假设检验: $H_0: \tau = 0, H_1: \tau > 0$. 关于离散型指数族分布模型的偏大离差和偏小离差问题, 在许多文献中都有详细介绍, 如 Moore (1986), McCullagh & Nelder (1989), Wilson (1989), Breslow (1990), Gelfand & Dalal (1990), Dean (1992), Pawitan (2001) 等. 另外, Severini (1999) 建议应用精确条件检验研究某些偏大离差的检验问题, Molina et al (2001) 还刻画了更复杂的偏大离差模型.

Smith & Heitjan (1993) 的方法也很典型, 他们把随机效应归结到回归系数 β 的随机化 (记为 $\tilde{\beta}$), 并由此来检验变离差, 即假设 $E(\tilde{\beta}) = \beta$, $\text{Var}(\tilde{\beta}) = \Sigma$, 然后检验假设: $H_0: \Sigma = 0$. 类似的还有 Dean & Lawless (1989), Dean (1992) 等. Commenges & Jacqmin-Gadda (1997) 在更广泛的随机效应模型假设下, 讨论了数据的变离差和偏大离差检验问题, 即设 y_i 有分布函数 $F(\cdot, \varepsilon_i)$, $\varepsilon_i = \theta^{1/2} u_i$, 随机效应序列 $\{u_i\}$ 满足: $E(u_i) = 0$, $\text{Var}(u_i) = 1$, $E(u_i u_j) = w_{ij}$, 这时模型的变离差检验即化为假设检验问题: $H_0: \theta = 0, H_1: \theta \neq 0$. 类似的工作有 Zelterman & Chen (1988), Ganio & Schaffer (1992) 等.

在连续型的指数族分布模型中, 导致变离差的因素可能有两个: σ_i^2 的变异或随机效应的影响. Wei et al (1998) 通过将离差参数化研究了指数族广义非线性回归模型的变离差检验, 得到了似然比检验统计量和

score 检验统计量以及它们的调整形式. 林金官, 韦博成 (2001) 同时用随机效应和离差参数的参数化的方法, 给出了指数族广义非线性回归模型的变离差检验的更一般的方法. 在利用随机效应法研究模型的变离差和偏大离差检验时, 将似然函数进行 Laplace 展开是一个重要的方法, 检验统计量的推导都是在似然函数的主部上展开的 (Zelterman & Chen, 1988; Dean & Lawless, 1989; Breslow, 1990; Dean, 1992; Smith & Heitjan, 1993; Commenges et al, 1994; Commenges & Jacmin-Gadda, 1997; Lin, 1997; 林金官, 韦博成, 2001, 2002 a, b 等).

§ 4. 纵向数据的异方差或变离差检验

纵向数据 (longitudinal data) 分析是近年来统计学的热点课题之一, Diggle et al (1994) 是第一本系统论述纵向数据分析的著作. 该书讨论了基于线性和广义线性模型的纵向数据的统计分析. Verbeke & Molenberghs (2000) 详细讨论了线性混合效应模型的纵向数据分析. 另外, 在文献 Davidian & Giltian (1995), Pinheiro & Bates (2000), Pawitan (2001) 中也有较多的篇幅讨论了纵向数据. 根据 Laird & Ware (1982) 和 Diggle et al (1994), 纵向数据主要指对同一组受试单元在不同时间或空间上的重复观测数据. 为了用线性或非线性模型拟合纵向数据, 需要确定一个合理的协方差结构. Diggle et al (1994) 指出, 刻画协方差结构通常有三种可能因素, 即序列相关 (特别是一阶自相关)、随机效应和随机误差; 该书还进一步说明了几种刻画协方差结构的方法. 随机效应模型在生物医学统计、心理学、计量经济和工业控制等许多领域都有广泛的应用. 基于纵向数据的随机效应模型包括具有正态误差的随机效应模型和指数族广义随机效应模型. 后者是前者的推广. 对纵向数据模型, 也存在异方差或变离差的检验问题, 但牵涉的因素比第 1, 2 节复杂. 对具有正态误差的随机效应模型, 需检验组间和组内的异方差, 若数据与时间有关, 还要检验自相关性; 对指数族广义随机效应模型, 需检验离差参数的齐性和随机效应影响的显著性, 对特殊的指数族广义随机效应模型, 也可检验随机效应的方差齐性.

4.1 具有正态误差的非线性随机效应模型的异方差检验

具有正态误差的非线性随机效应模型的一般形式是:

$$\mathbf{Y}_i = f(X_i, \beta) + Z_i \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (7)$$

其中, \mathbf{Y}_i 为第 i 个对象 n_i 次观测值组成的观测向量, X_i, Z_i 为已知的设计矩阵, \mathbf{u}_i 为组间随机效应, $\mathbf{u}_i \sim N(0, \sigma^2 D_i)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 与 \mathbf{u}_i 独立, 且 $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N(0, \sigma^2 M_i)$, $M_i = \text{diag}(m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in_i})$, $m_{ij} = m(\mathbf{z}_{ij}, \gamma)$. 进一步可得到 $\text{Var}(\mathbf{Y}_i) = \sigma^2 (Z_i D_i Z_i^T + M_i)$. Zhang & Weiss (2000) 将 D_i 称为组间方差, M_i 称为组内方差. Stram & Lee (1994) 在 $M_i = I_{n_i}$ 的条件下研究了 \mathbf{u}_i 的齐性检验, 即 $H_0: D_i = D$. Zhang & Weiss (2000) 研究了线性随机效应模型的三种异方差性的检验, 即组内 (within-individual)、组间 (between-individual) 以及多组 (multivariate) 异方差性的检验, 对应于分别和同时检验 $H_0: D_i = D$ 和 $H_0: M_i = I_{n_i}$. 林金官, 韦博成 (2002 d) 推广了 Zhang & Weiss (2000) 的结果, 得到了非线性随机效应模型的异方差性的检验统计量.

当纵向数据与时间有关时, 考虑数据的相关性是必要的, Diggle et al (1994) (第 4, 5 章) 用自相关误差刻画了线性纵向数据模型, 并在组间自相关系数的齐性假设下, 研究了模型的多种参数估计. Chi & Reinsel (1989, 1991) 同时用随机效应和自相关误差刻画了线性纵向数据模型, 在随机效应、随机误差的方差齐性及受试单元间自相关系数的齐性假设下, 研究了自相关性的显著性检验及其渐近性质. 由于各组所产生效应的方差 (随机效应的方差)、各组内部的方差 (随机误差的方差) 以及各组重复测量所产生的自相关系数都是依赖于各组及其不同次的测量, 因而方差 (随机效应的方差和随机误差的方差) 齐性或自相关系数的齐性的假设并不总是正确的, 对该模型, 也要进行异方差检验、自相关检验及自相关系数的齐性检验. 刘应安, 韦博成 (2002) 对具有 AR(1) 误差的线性随机效应模型, 讨论了组内异方差性和组间自相关性的检验. Lin & Wei (2002 c) 研究了更一般的情形, 即在 (7) 式中, 假设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 服从 AR(1) 过程: $\varepsilon_{i,1} = \tau_{i,1}$, $\varepsilon_{i,t} = \phi_i \varepsilon_{i,t-1} + \tau_{i,t}$, $t \geq 2$, 其中 ϕ_i 第 i 组自相关系数, 且 $\boldsymbol{\tau}_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{in_i})^T$ 服从均值为 0 协方差为 $\sigma^2 M_i = \sigma^2 \text{diag}(m_{ij}, j = 1, 2, \dots, n_i)$

的正态分布. 相应地, $\text{Var}(\mathbf{Y}_i) = \sigma^2(Z_i D_i Z_i^T + Q_i^{-1} M_i Q_i^{-T})$, 其中 $Q_i^{-T} = (Q_i^{-1})^T$ 及

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_i & 1 \end{bmatrix}.$$

因此方差 $\text{Var}(\mathbf{Y}_i)$ 的齐性检验, 相当于分别和同时检验 $H_0: D_i = D$; $H_0: M_i = I_{n_i}$ 和 $H_0: \phi_i \equiv \phi$. Lin & Wei (2002 c) 系统研究了这些检验, 得到了多个检验统计量.

4.2 指数族广义随机效应模型的变离差检验

假设第 i 个对象第 j 次的观测值 y_{ij} 关于随机效应 \mathbf{u}_i 有条件密度:

$$p(y_{ij}|\mathbf{u}_i) = \exp\{\sigma_i^{-2}[y_{ij}\theta_{ij} - b(\theta_{ij}) - c(y_{ij}, \sigma_i^2)]\}, \quad (8)$$

$i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n_i$. 此时我们有 $\mu_{ij} = E(y_{ij}|\mathbf{u}_i) = \dot{b}(\theta_{ij})$, $\text{Var}(y_{ij}|\mathbf{u}_i) = \sigma_i^{-2}\ddot{b}(\theta_{ij})$. 从而可得指数族广义非线性随机效应模型:

$$g(\mu_{ij}) = f(\mathbf{x}_{ij}, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{z}_{ij}^T \mathbf{u}_i, \quad (9)$$

其中, $g(\cdot)$ 是已知的单调联系函数, \mathbf{u}_i 是组间随机效应, 且 $\mathbf{u}_i \sim (\mathbf{0}, D)$. 当 σ_i^2 恒等于 σ^2 和组间随机效应不存在时, $\sigma^2\ddot{b}(\theta_{ij})$ 称为纵向数据的名义离差. 当 σ_i^{-2} 变异或随机效应存在时, 则模型存在变离差或偏大离差 (Thall & Vail, 1990; Efron, 1992). Hamerle (1990), Commenges et al (1994) 利用随机效应法研究了线性 logistic 回归的变离差检验, Jacqmin-Gadda & Commenges (1995), Lin (1997) 利用随机效应法研究了广义线性模型的变离差检验, Lee & Nelder (2000) 概括了文献中研究纵向数据的变离差性的两种方法. Hall & Preatgard (2001) 通过约束条件进一步研究了检验变离差的 score 统计量并指出其极限分布应为混合 χ^2 -分布. 以上作者多限于研究广义线性模型的变离差检验. Lin & Wei (2002 a) 讨论了 logistic 非线性模型的变离差检验, 并给出了检验的近似局部功效函数, 林金官, 韦博成 (2002 e) 研究了基于重复测量数据的 Poisson 回归模型的偏大离差的 score 检验, 林金官, 韦博成 (2001) 同时利用离差参数的参数化方法和随机效应法研究了广义非线性回归模型的变离差检验, 得到了多个检验统计量. 韦博成, 林金官 (2002) 还讨论了更复杂的指数族广义非线性混合效应模型的变离差检验, 该模型由 (8) 式和以下 (9') 式组成:

$$g(\mu_{ij}) = f(\mathbf{x}_{ij}, \phi_i), \quad \phi_i = A_i\boldsymbol{\beta} + B_i\mathbf{u}_i, \quad (9')$$

其中, $\boldsymbol{\beta}$ 为固定效应, \mathbf{u}_i 为随机效应, A_i, B_i 为已知的设计矩阵. 指数族广义非线性混合效应模型是一般的非线性混合效应模型 (Lindstrom & Bates, 1990; Davidian & Giltian, 1995; Pinheiro & Bates, 1995; Pinheiro & Bates, 2000; Pawitan, 2001) 的推广. 对于这类模型的变离差检验问题还有待更深入的研究.

在随机误差和随机效应的正态假设下, 可直接研究随机效应的方差 (组间方差) 的齐性检验问题. 对一般的指数族随机效应模型 (非正态情形), 研究随机效应存在时, 组间效应方差的齐性检验, 结果还不多见. 林金官, 韦博成 (2002 f) 对一种特殊情形 - Poisson-Gamma 回归模型, 讨论了偏大离差存在时, 离差参数 (组间效应方差) 的齐性检验. 其它情形还有待进一步探讨.

与第3节一样, 在研究指数族随机效应模型的变离差检验时, 将似然函数进行 Laplace 展开, 然后利用似然函数的主部推导检验统计量, 是一个通用的方法, 该方法在许多文献中都有应用 (Hamerle, 1990; Commenges et al, 1994; Jacqmin-Gadda & Commenges, 1995; Lin, 1997; Lin & Wei, 2002 a; 林金官, 韦博成, 2002 e; 林金官, 韦博成, 2002 f; 韦博成, 林金官, 2002 等).

§5. 进一步的问题

回归模型的异方差或变离差检验, 还有许多需要进一步研究的问题. 今列举一些如下:

5.1 再生散度非线性模型中的变离差检验

Jorgensen (1997) 定义了再生散度分布族, 其密度函数为:

$$p(y_i, \mu_i, \sigma_i^2) = a(y_i, \sigma_i^2) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} d(y_i, \mu_i) \right\}, \quad (10)$$

其中, $d(y_i, \mu_i)$ 为单位偏差度函数 (unit deviance), 再生散度分布族是比指数族更广泛的分布族. 与 (4) 类似, 若 $g(\mu_i) = f(\mathbf{x}_i, \beta)$, 即得再生散度非线性模型. 唐年胜 (1999) 研究了该模型的参数估计、几何性质、统计诊断等问题. 在该模型中, σ_i^2 的变异性需要进行检验. 若 $g(\mu_i) = f(\mathbf{x}_i, \beta) + \mathbf{z}_i^T \mathbf{u}_i$, 即为再生散度非线性随机效应模型. 对再生散度非线性随机效应模型, 也有随机效应的存在性检验问题, 现我们正做这方面的工作.

5.2 非参数和半参数模型的异方差检验

Eubank & Thoms (1993), Dettner & Munk (1998) 研究了非参数回归的异方差检验, 即:

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad (11)$$

其中, $\text{Var}(y_i) = \sigma_i^2$. 他们研究了 σ_i^2 的齐性检验, 给出了检验统计量的极限分布, 并通过随机模拟研究了检验的功效. 半参数非线性回归模型的一般形式是:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \beta) + g(t_i) + \varepsilon_i, \quad (12)$$

朱仲义 (1999) 在一定条件下研究了该模型的参数估计、几何性质、统计诊断等问题. Müller & Zhao (1995, Ann. Statist.), Diblasi & Bowman (1997) 对特殊情形讨论了半参数回归模型的异方差检验. 朱仲义等 (2002) 对线性情形 $y_i = \mathbf{x}_i^T \beta + g(t_i) + \varepsilon_i$, 基于 B 样条研究了模型的异方差检验, 并推导了检验统计量的极限分布; 对于非线性情形还有待进一步研究. 在非参数模型和半参数模型中, 若数据受随机效应 (诸如纵向数据等) 的影响, 如何检验模型的异方差性, 也还有待进一步研究.

5.3 非线性测量误差模型的异方差检验

非线性测量误差模型的一般形式是:

$$\begin{cases} Y_i = f(Z_i, \beta) + \varepsilon_i, & \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2), \\ X_i = Z_i + \delta_i, & \delta_i \sim N(0, \Lambda_i), \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

宗序平 (1999) 在一定条件下 (特别是方差齐性的条件下) 讨论了该模型的参数估计、统计诊断等问题. 但在该模型中, 方差齐性的假设也要进行检验. Carroll, et al (1995) 考虑了该模型的异方差形式, Carroll & Spiegelman (1992) 对测量误差模型提出了一种诊断模型的非线性和异方差性的方法. 对该模型的异方差检验问题还有待进一步研究.

5.4 其他一些问题

关于异方差或变离差的检验统计量的极限分布, 在现有的文献中, 通常都假定相应的似然函数满足一定的正则性条件 (Cox & Hinkley, 1974), 因而在样本容量充分大时, 检验的似然比统计量和 score 检验统计量渐近地服从 χ^2 分布. Hall & Preatgard (2001) 认为, 在某些情形下, 检验统计量的极限分布应为混合 χ^2 分布. 关于这方面的问题, 特别在非正态的许多模型中, 还有待进一步深入研究, 但迄今所见文献甚少. 另外, 由于推导异方差或变离差检验的功效函数难度很大, 这方面的研究文献较少, Self & Mauritsen (1988) 推导了广义线性模型中, score 统计量的局部近似功效, 但该方法使用不太方便且要求参数只能在原假设附近变动; Self, Mauritsen & Ohara (1992) 推导了广义线性模型中, 似然比统计量的近似功效, 该方法使用较方便, 通过随机模拟得知, 后者允许参数在更大范围内变动. 目前, 随机模拟成为评价异方差或变离差检验统计量功效的主要方法, 大多数有关异方差或变离差检验的文献都有随机模拟的结果.

参 考 文 献

- [1] Aitkin, M., Modelling variance heteroscedasticity in normal regression using GLIM, *Applied Statistics*, **36**(1987), 332-339.
- [2] Baltagi, B.H. & Li, Q., A joint test for serial correlation and random individual effects, *Statistics & Probability Letters*, **11**(1980), 277-280.
- [3] Baksalary, J.K., Nurhonen, M. & Puntanen, S., Effect of correlations and unequal variances in testing for outliers in linear regression, *Scand. J. Statist.*, **19**(1992), 91-95.
- [4] Bates, D.M. & Watts, D.G., *Nonlinear Regression Analysis & its Applications*, New York: John Wiley & Sons, 1988.
- [5] Bickel, P., Using residuals robustly I: Tests for heteroscedasticity, nonlinear, *Ann. Statist.*, **6**(1978), 266-291.
- [6] Breslow, N., Tests of hypotheses in overdispersed Poisson regression and other quasi-likelihood models, *J. Am. Statist. Assoc.*, **85**(1990), 565-571.
- [7] Breusch, T.S. & Pagan, A.R., A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation, *Econometrica*, **47**(1979), 1287-1294.
- [8] Breusch, T.S. & Pagan, A.R., The Lagrange multiplier test and its applications to model specification in econometrics, *The Review of Econometric Studies*, **47**(1980), 239-253.
- [9] Carroll, R.J. & Ruppert, D., On robust tests for heterodcedasticity, *Ann. Statist.*, **9**(1981), 205-209.
- [10] Carroll, R.J. & Ruppert, D., *Transformation and Weighting in Regression*, London: Chapman and Hall, 1989.
- [11] Carroll, R.J., Ruppert, D. & Stefanski, L.A., *Measurement Error in Nonlinear Models*, London: Chapman Hall, 1995.
- [12] Carroll, R.J. & Spiegelman, C.H., Diagnostics for nonlinearity and heteroscedasticity in errors in variable regression, *Technometrics*, **34**(1992), 186-196.
- [13] Chan, L.K. & Mak, T.K., Heteroscedasticity regression models applications to off-line quality control, *Scand. J. Statist.*, **28**(2001), 445-454.
- [14] Chen, C.F., Score tests for regression model, *J. Am. Statist. Assoc.*, **78**(1983), 158-161.
- [15] Chen, C.F., Robustness aspects of of score tests for generalized linear and partially linear regression models, *Technometrics*, **27**(1985), 277-283.
- [16] Chi, E.M. & Reinsel, G.C., Models for longitudinal data with random effects and AR(1) errors, *J. Am. Statist. Assoc.*, **84**(1989), 452-459.
- [17] Chi, E.M. & Reinsel, G.C., Asymptotic properties of the score test for autocorrelation in a random effects and AR(1) errors model, *Statistics & Probability Letters*, **11**(1991), 453-457.
- [18] Commenges, D. & Jacqmin-Gadda, J., Generalized score test of homogeneity based on correlated random effects models, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **59**(1997), 157-171.
- [19] Commenges, D., Letenneur, L., Jacqmin-Gadda, H. et al, Test of homogeneity of binary data with explanatory variables, *Biometrics*, **50**(1994), 613-620.
- [20] Cook & Weisberg, Diagnostics for heteroscedasticity in regression, *Biometrika*, **70**(1983), 1-10.
- [21] Cook & Weisberg, *An Introduction to Regression Graphics*, New York: Wiley, 1994.
- [22] Cox, D.R. & Hinkley, D.V., *Theoretical Statistics*, London: Chapman and Hall, 1974.
- [23] Cox, D.R., Some remarks on dispersion, *Biometrika*, **70**(1983), 269-274.
- [24] Cox, D.R. & Reid, N., Parameter orthogonality and approximate conditional inference, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **49**(1987), 1-39.
- [25] Cox, D.R. & Reid, N., A note on the calculation of adjusted profile likelihood, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **55**(1993), 467-471.
- [26] Davidian, M. & Giltian, D.M., *Nonlinear Models for Repeated Measurement data*, London: Chapman and Hall, 1995.
- [27] Dean, C.B., Testing for overdispersion in Poisson and binomial regression models, *J. Am. Statist. Assoc.*, **87**(1992), 451-457.

- [28] Dean, C.B. & Lawless, J.F., Testing for detecting overdispersion in Poisson regression models, *J. Am. Statist. Assoc.*, **84**(1989), 467-472.
- [29] Dette, H. & Munk, A., Testing heteroscedasticity in nonparametric regression, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **60**(1998), 693-708.
- [30] Diblasi, A. & Bowman, A., Testing for constant variance in a linear model, *Statistics & Probability Letters*, **33**(1997), 95-103.
- [31] Diggle, P.J., Liang, K.Y. & Zeger, S.L., *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford: Clarendon, 1994.
- [32] Durbin, J. & Watson, G.S. & Watson, Testing for serial correlation in least squares regression: I, II, III, *Biometrika*, **37**(1950), 408-428; **38**(1951), 159-178; **58**(1977), 1-19.
- [33] Efron, b., Poisson overdispersion estimates based on the method of asymmetric maximum likelihood, *J. Am. Statist. Assoc.*, **87**(1992), 98-107.
- [34] Epps, T.W. & Epps, M.L., The robustness of some standard tests for autocorrelation and heteroscedasticity when both problems are present, *Econometrica*, **45**(1977), 745-753.
- [35] Eubank, R.L. & Thoms, W., Detecting heteroscedasticity in nonparametric regression, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **55**(1993), 145-155.
- [36] Fisher, R.A., The significance of deviations from expectation in a Poisson series, *Biometrics*, **6**(1950), 17-24.
- [37] Ganio, L.M. & Schaffer, D.W., Diagnostics of overdispersion, *J. Am. Statist. Assoc.*, **87**(1992), 795-804.
- [38] Gelfand, A.E. & Dalal, S.R., A note on overdispersion exponential family, *Biometrika*, **77**(1990), 55-64.
- [39] Glejser, H., A new test for heteroscedasticity, *J. Am. Statist. Assoc.*, **64**, 316-323.
- [40] Goldfeld, S.M. & Quandt, R.E., Some tests for heteroscedasticity, *J. Am. Statist. Assoc.*, **60**(1965), 539-547.
- [41] Hall, D.B. & Preatgard, J.T., Order-restricted score tests for homogeneity in generalized linear and nonlinear mixed models, *Biometrika*, **88**(2001), 739-751.
- [42] Hamerle, A., On a simple test for neglected heteroscedasticity in panel studies, *Biometrics*, **46**(1990), 193-199.
- [43] Harrison, M.J. & McCabe, B.P.M., A test for heteroscedasticity based on ordinary least squares residuals, *J. Am. Statist. Assoc.*, **74**(1979), 494-500.
- [44] 胡跃清, 韦博成, 非线性回归模型中误差的相关性检验, *中国统计学报*, **32**(1994), 499-506.
- [45] Jacqmin-Gadda, H. & Commenges, D., Testing of homogeneity for generalized linear models, *J. Am. Statist. Assoc.*, **90**(1995), 1237-1246.
- [46] Jones, M.P., Nonrobustness of the information test in detecting heterogeneity, *Canad. J. Statist.*, **27**(1999), 771-779.
- [47] Jorgensen, B., *The Theory of Dispersion Models*, London: Chapman and Hall, 1997.
- [48] Kimura, D.K., Testing nonlinear regression parameters under heteroscedasticity, normally distributed errors, *Biometrics*, **46**(1990), 697-708.
- [49] Laird, N.M. & Ware, J.H., Random-effects models for longitudinal data, *Biometrics*, **38**(1982), 963-974.
- [50] Lambert, D. & Roeder, K., Overdispersion diagnostics for generalized linear models, *J. Am. Statist. Assoc.*, **90**(1995), 1225-1236.
- [51] le Cessie & van Houwelingen, H.C., Testing the fit of a regression model via score tests in random effects models, *Biometrics*, **51**(1995), 600-614.
- [52] Lee, Y. & Nelder, J.A., Two ways of modeling overdispersion in non-normal data, *Applied Statist.*, **49**(2000), 591-598.
- [53] Liang, K.Y., A locally most powerful test for homogeneity with many strata, *Biometrika*, **74**(1987), 259-264.
- [54] 林金官, 韦博成, 指数族广义非线性模型的变离差检验, *数学物理学报*, 待发表.
- [55] Lin, J.G. & Wei, B.C., Testing for varying dispersion in generalized nonlinear models with random effects, Submitted (2001).
- [56] 林金官, 韦博成, 加权非线性随机系数模型异方差性的 score 检验, *工程数学学报*, **19**(2002 a), 109-115.
- [57] 林金官, 韦博成, 随机权函数非线性回归模型的异方差统计分析, *应用概率统计*, **18**(2002 b), 431-437.
- [58] 林金官, 韦博成, 非线性 ARIMA(0,1,0) 模型的异方差性检验, 已投 (2002 c).
- [59] 林金官, 韦博成, 非线性随机效应模型的异方差性检验, *系统科学与数学*, **22**(2002 d), 245-256.
- [60] 林金官, 韦博成, 基于重复测量数据的 Poisson 回归模型的偏大离差的 score 检验, *应用数学*, **15**(2002 e), 18-22.

- [61] 林金官, 韦博成, 非线性 Poisson-Gamma 回归模型中存在偏大离差时离差参数的齐性检验, *应用概率统计*, 待发表.
- [62] 林金官, 韦博成, 非线性纵向数据模型中方差和自相关系数的齐性检验, 已投 (2002 g).
- [63] Lin, J.G. & Wei, B.C., Testing for homogeneity of binomial data in nonlinear logistic models with random effects, Submitted (2002 a).
- [64] Lin, J.G. & Wei, B.C., Testing for heteroscedasticity and correlation in nonlinear models with correlated errors, Submitted (2002 b).
- [65] Lin, J.G. & Wei, B.C., Testing for homogeneity of variances and autocorrelation in nonlinear models with random effects and AR(1) errors, Submitted (2002 c).
- [66] Lin, J.G. & Wei, B.C., Testing for varying dispersion in discrete exponential family nonlinear models, Submitted (2002 d).
- [67] Lin, X., Variance component testing in generalized linear models with random effects, *Biometrika*, **84**(1997), 309-326.
- [68] Lindsey, J.K., *Applying Generalized Linear Models*, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [69] Lindsey, J.K., *Nonlinear Models in Medical Statistics*, New York: Oxford, 2001.
- [70] Lindstrom, M.J. & Bates, D.M., Nonlinear mixed effects models for repeated measure data, *Biometrics*, **46**(1990), 673-687.
- [71] 刘应安, 韦博成, 林金官, 误差为 ARMA(1,1) 的非线性回归模型相关性和异方差性的检验, *东南大学学报*, **31**(2001), 98-102.
- [72] 刘应安, 韦博成, 具有 AR(1) 误差的线性随机效应模型的相关性和异方差性的检验, 已投 (2002).
- [73] 刘应安, 韦博成, 具有双线性 BL(1,1,1,1) 误差的非线性回归模型的相关性和方差齐性的检验, 已投 (2002).
- [74] Lustbader, E.D. & Moolgavker, S.H., A diagnostic statistic for the score test, *J. Am. Statist. Assoc.*, **80**(1985), 375-379.
- [75] Mak, T.K., Estimation of parameter in heteroscedastic linear models, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **54**(1992), 649-655.
- [76] McCullagh, P. & Nelder, J.A., *Generalized Linear Models*, London: Chapman and Hall, 1989.
- [77] Molina, E.A., Smith, T.M.F. & Sugden, R.A., Modelling overdispersion for complex survey data, *International Statistical Review*, **69**(2001), 373-384.
- [78] Moore, D.F., Asymptotic properties of moment estimators for overdispersed counts and proportions, *Biometrika*, **73**(1986), 583-588.
- [79] Moran, A.P., Asymptotic properties of homogeneity tests, *Biometrika*, **60**(1973), 79-85.
- [80] Miller, H.G. & Zhao, P.L., On a semiparametric variance function model and a test for heteroscedasticity, *Ann. Statist.*, **23**(1995), 946-967.
- [81] Pinheiro, J.C. & Bates, D.M., Approximations to the log-likelihood function in the mixed-effects model, *J. Computational and Graphical Statistics*, **4**(1)(1995), 12-35.
- [82] Pinheiro, J.C. & Bates, D.M., *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*, New York: Springer-Verlag, 2000.
- [83] Portnoy, S., Exactly what is being modeled by the systematic component in a heteroscedastic linear regression, *Statistics & Probability Letters*, **13**(1992), 253-258.
- [84] Seber, G.A.F., *Linear Regression Analysis*, New York: Wiley, 1977.
- [85] Seber, G.A.F. & Wild, C.J., *Nonlinear Regression*, New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [86] Self, S.G. & Mauritsen, R.H., Power/Sample size calculations for generalized linear models, *Biometrics*, **44**(1988), 79-86.
- [87] Self, S.G., Mauritsen, R.H. & Ohara, J., Power calculations for likelihood ratio tests in generalized linear models, *Biometrics*, **48**(1992), 31-39.
- [88] Severini, T.A., On the effect of overdispersion on exact conditional tests, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **61**(1999), 115-126.
- [89] Simonoff, J.S. & Tsai, C.L., Improved tests for nonconstant variance in regression based on the modified profile likelihood, *Applied Statist.*, **43**(1994), 357-370.
- [90] Smith, P.J. & Heitjan, D.F., Testing and adjusting for departures from nominal dispersion in generalized linear models, *Applied Statist.*, **42**(1993), 31-41.

- [91] Smyth, G.K., Generalized linear models with varying dispersion, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **51**(1989), 47-60.
- [92] Stram, O.D. & Lee, J.W., Variance component testing in the longitudinal mixed effects model, *Biometrics*, **50**(1994), 1171-1177.
- [93] 唐年胜, 系统分析中非指数族非线性模型的统计分析, 东南大学博士论文, 1999.
- [94] Thall, P.F. & Vail, S.C., Some covariance models for longitudinal count data with overdispersion, *Biometrics*, **46**(1990), 657-671.
- [95] Tsai, C.L., Score test for the first-order autoregressive model with heteroscedasticity, *Biometrika*, **73**(1986), 455-460.
- [96] Verbeke, G. & Molenberghs, G., *Linear Mixed Models for Longitudinal Data*, New York: Springer-Verlag, 2000.
- [97] Verbyla, A.P., Modelling variance heterogeneity: residual maximum likelihood and diagnostics, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **55**(1993), 493-508.
- [98] 韦博成, 加权非线性回归的 score 检验及其局部影响分析, *应用概率统计*, **11**(1995), 147-156.
- [99] Wei, B.C., *Exponential Family Nonlinear Models*, Singapore: Springer-Verlag, 1998.
- [100] 韦博成, 胡跃清, 非线性回归模型相关性和异方差性的检验, *工程数学学报*, **4**(1994), 1-12.
- [101] 韦博成, 林金官, 指数族广义非线性混合效应模型的变离差检验, *东南大学学报 特约稿件*, **32**(2002), 528-535.
- [102] Wei, B.C., Shi, J.Q., Fung, W.K. & Hu, Y.Q., Testing for varying dispersion in exponential family nonlinear models, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **50**(1998), 277-297.
- [103] Williams, D.A., Extra-binomial variation in logistic linear models, *Applied Statistics*, **31**(1982), 144-148.
- [104] Wilson, J.R., Chi-square tests for overdispersion with multiparameter estimates, *Applied Statistics*, **38**(1989), 441-453.
- [105] Zelterman, D. & Chen, C.F., Homogeneity tests against central-mixture alternatives, *J. Am. Statist. Assoc.*, **83**(1988), 179-182.
- [106] Zhang, F. & Weiss, R.E., Diagnosing explainable heterogeneity of variance in random-effects models, *Canad. J. Statist.*, **28**(2000), 3-18.
- [107] 朱仲义, 半参数线性回归模型的异方差检验, 已投 (2002).
- [108] 朱仲义, 系统分析中半参数非线性回归模型的统计分析, 东南大学博士论文, 1999.
- [109] 宗序平, 系统分析中非线性随机效应模型的统计分析, 东南大学博士论文, 1999.

Developments of the Tests for Heteroscedasticity or Varying Dispersion in Regression Models

WEI BOCHENG¹ LIN JINGUAN^{1,2} LU QINGZHE³

(¹ Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing, 210096)

(² Department of Mathematics, Jiangsu Institute of Education, Nanjing, 210013)

(³ Research Institute of Statistics, State Statistical Bureau, Beijing, 100826)

The tests for heteroscedasticity or varying dispersion in regression models are very important problems of statistical diagnostics. This paper systematically surveys the studying developments of the tests for heteroscedasticity or varying dispersion in general regression models, generalized regression models and regression models with random effects based on longitudinal data. The work done by us in recent years are introduced and some problems about heteroscedasticity or varying dispersion are introduced. Several problems to be resolved are suggested.