应用概率统计　第十五卷
第三期　1999年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 15 No. 3 Aug. 1999

可靠性增长试验中一种新的参数估计法*

陈应保[1]　　郑忠国
(华中师大数学系, 武汉, 430070) (北京大学概率统计系, 北京, 100871)

摘　要

本文在充分利用可靠性增长试验中各阶段试验数据评定现阶段可靠性指标的基础上对成败型和指数寿命型试验下所得的抽样数据, 采用一种新的样本空间排序法——字典排序法给出了现阶段可靠性的点估计和置信下限. 从理论和实例两个方面论证了它比仅利用现阶段数据的经典方法具有一致的优良性, 改进了房祥忠等[4]相应研究中的不足. 而文中定理2.4、定理3.4的结论不仅与可靠性增长试验的直观背景相吻合, 还大大提高了这种新方法的实际可操作性.

关键词: 可靠性增长试验, 点估计, 置信下限.

学科分类号: 213.2.

§1. 引　言

在可靠性增长试验中一般要进行m个阶段. 通常, 与以前各阶段相比本阶段的产品在设计、原材料和生产条件上都有所改进, 从而后一阶段产品的可靠性要比前阶段产品的可靠性有所提高. 整个产品在研制开发的过程中各个阶段得到一些试验数据, 对于这些试验数据, 经典方法仅利用最后一个阶段的试验数据对产品现阶段的可靠性指标进行评定. 本文研究了成败型和指数寿命型两类产品, 综合利用各阶段的试验数据对最后开发出产品的可靠性进行研究. 设一共有m个阶段的试验数据, 记q_i为第i个阶段产品的可靠性, 则$q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_m$. 实际中最关心的是现阶段的可靠性$q_m$, 即利用实验数据给出$q_m$的置信下限. 房祥忠等[4]提出了利用以前各阶段的数据对最后阶段的可靠性进行分析, 改进了经典方法的缺点. 但它们的结果还有缺陷, 在某些情况下, 用经典方法计算出的q_m的置信下限比房祥忠等的方法计算出的q_m的置信下限要好, 这对于实际工作来说是不满意的地方. 其二是房祥忠等的方法并未将样本空间中的各样本排成一个单行有序的队. 这一点从直观上来说也有不足之处. 本文提出了一种规则将样本空间中的各个点排成一个单行的有序队形. 从而克服了前面提到的缺陷并改进了房祥忠等的结果. 我们的方法要点是利用限制条件下的极大似然估计给出了q_i的点估计, 通过对样本空间更细致的排序给出了q_m的置信下限. 理论和实例计算表明这样得到的置信下限比经典方法所得置信下限具有一致的优良性, 与房祥忠等的结果比较虽不能说是一致改进, 但总体上来说也是改进了. 而定理2.4、定理3.4又大大提高了这种新方法的实际可操作性.

---

*受到国家基金委(9871003)和博士点基金(97000139)的资助.
本文1997年10月7日收到, 1998年2月10日收到修改稿.
[1]北大访问学者.

§2. 成 败 型

假定某产品的研制进行了 m 个阶段, 得到了 m 个阶段的试验数据. 设在第 i 个阶段抽取了 n_i 件产品做测试, 其中有 k_i 件成功, n_i-k_i 件失效, $i=1,2,\cdots,m$. 用 q_i 表示第 i 个阶段产品的可靠性(即成功率), 则由可靠性增长试验的假设应有

$$0<q_1\le q_2\le\cdots\le q_m<1. \tag{2.1}$$

下面我们给出在此约束条件下 q_i 的点估计 $\widehat{q}_i$ 和 q_m 的置信下限.

1. 点估计

Ayer(1955) 证明了在约束条件 (2.1) 之下参数 q_i 的最大似然估计为

$$\widehat{q}_i=\min_{i\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},\qquad i=1,2\cdots,m. \tag{2.2}$$

2. 置信下限

下面利用样本空间的字典排序法找 q_m 的置信下限, 记样本空间

$$E=\{(x_1,\cdots,x_m):x_i=0,1,\cdots,n_i,\ i=1,2,\cdots,m\}. \tag{2.3}$$

定义2.1 设 $(x_1,\cdots,x_m)$ 和 $(k_1,\cdots,k_m)$ 为样本空间 E 中的两个点. 称它们具有关系 $(x_1,\cdots,x_m)\succ(k_1,\cdots,k_m)$ (或记作 $(k_1,\cdots,k_m)\prec(x_1,\cdots,x_m)$), 如下列条件之一成立:

1) $x_m>k_m$;

2) $x_m=k_m$, 并存在指标 i, $1\le i\le m$, 使 $\widehat{q}_j(x_1,\cdots,x_m)=\widehat{q}_j(k_1,\cdots,k_m)$, $j=i+1,\cdots,m$, 但 $\widehat{q}_i(x_1,\cdots,x_m)>\widehat{q}_i(k_1,\cdots,k_m)$;

3) 对一切 j, $1\le j<m$, 使 $\widehat{q}_j(x_1,\cdots,x_m)=\widehat{q}_j(k_1,\cdots,k_m)$ 并存在 i, $1\le i<m$, 使 $x_m=k_m,\cdots,x_{i+1}=k_{i+1}$, 但 $x_i>k_i$.

可验证关系 $\succ$ 是一个全序关系, 且有如下结论.

定理2.1 样本空间 E (见 (2.4) 式) 中元素按关系 $\succ$ 可以排成如下的一个"链":

$$z_N\succ z_{N-1}\succ\cdots\succ z_1,$$

其中 $N=\prod\limits_{i=1}^{m}(n_i+1)$, $z_i\in E$.

证明略. □

令 $\Theta=\{(q_1,\cdots,q_m):0\le q_1\le q_2\le\cdots\le q_m\le 1\}$ 为参数空间, $Z=(X_1,\cdots,X_m)$ 为样本. 令

$$G(k_1,\cdots,k_m;q_1,\cdots,q_m)=P_{q_1,\cdots,q_m}\{(X_1,\cdots,X_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)\},$$

(其中 $P_{q_1,\cdots,q_m}(A)$ 表示 $X_i\sim B(n_i,q_i)$, $X_1,\cdots,X_m$ 相互独立时事件 A 的概率.)

$$q_L(k_1,\cdots,k_m)=\inf\{q_m:G(k_1,\cdots,k_m;q_1,\cdots,q_m)>\alpha,\ 0\le q_1\le\cdots\le q_m\le 1\},$$

则由文献[1]知

$$P_{q_1,\cdots,q_m}\{q_m\ge q_L(X_1,\cdots,X_m)\}\ge 1-\alpha,\qquad 0\le q_1\le\cdots\le q_m\le 1,$$

且 $q_L(0,\cdots,0)=0$.

此即说明 q_L 为 q_m 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限, 当 $(k_1,\cdots,k_m)\neq(0,\cdots,0)$ 时, 关于 $q_L(k_1,\cdots,k_m)$ 的计算我们有下面的结果.

定理2.2 对任何 $\alpha(0<\alpha<1),(k_1,\cdots,k_m)\neq(0,\cdots,0),q_L(k_1,\cdots,k_m)$ 是关于 $q(0<q<1)$ 的方程

$$\sum_{(k_1,\cdots,k_m)\succ(x_1,\cdots,x_m)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{x_i}q^{x_i}(1-q)^{n_i-x_i}=1-\alpha \tag{2.4}$$

的唯一解, 且方程的左端是关于 q 的严格单调减连续函数.

为证明定理2.2我们先给出下面两个引理.

引理2.1 设 $\succ$ 为本文中定义的排序关系, 则 $\succ$ 关于每个分量 x_i 是单调的, 即若 $\widetilde{x}_i>x_i$, 则

$$(x_1,\cdots,x_{i-1},\widetilde{x}_i,x_{i+1},\cdots,x_m)\succ(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_m).$$

证明: 由关系 $\succ$ 的定义马上可得. □

引理2.2 任意给定的 $(k_1,\cdots,k_m)$ 记

$$A=\{(x_1,\cdots,x_m):(x_1,\cdots,x_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)\}, \tag{2.5}$$

则 $P_{q_1,\cdots,q_m}(A)$ 对每个 q_i 单调上升, 且若 $k_i\neq 0$, 则 $P_{q_1,\cdots,q_m}(A)$ 关于 q_i 严格单调上升. (记号 $\succeq$ 与 $\succ$ 的关系与通常的不等号的关系是类似的.)

证明: 不失一般性, 我们只证明 $P_{q_1,\cdots,q_m}(A)$ 关于 q_1 单调, 记

$$A_{m-1}=\{(x_2,\cdots,x_m):\exists\ x_1 \text{ 使 } (x_1,\cdots,x_m)\in A\},$$

此时由引理2.1可知, 集合 A 可写成 $\bigcup\limits_{(x_2,\cdots,x_m)\in A_{m-1}}A_{(x_2,\cdots,x_m)}$ 的形式, 其中 $A_{(x_2,\cdots,x_m)}=\{(x_1,\cdots,x_m):x_1\geq x_1^0,\ (x_1^0,x_2,\cdots,x_m)\in A\}$, 式中 x_1^0 随着 $(x_2,\cdots,x_m)$ 的不同而不同, 且对给定 $(x_2,\cdots,x_m)$, x_1^0 是使 $(x_1,\cdots,x_m)\in A$ 中最小者.

这样

$$\begin{aligned}P_{q_1,\cdots,q_m}(A)&=\sum_{(x_2,\cdots,x_m)\in A_{m-1}}P_{q_1,\cdots,q_m}(A_{(x_2,\cdots,x_m)})\\&=\sum_{(x_2,\cdots,x_m)\in A_{m-1}}\left\{\left[\prod_{i=2}^{m}\binom{n_i}{x_i}q_i^{x_i}(1-q_i)^{n_i-x_i}\right]\right.\\&\qquad\left.\times\sum_{j\geq x_1^0}\binom{n_i}{j}q_1^{j}(1-q_1)^{n_1-j}\right\},\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式花括弧中的函数为 q_1 的单调上升函数, 由此可知 $P_{q_1,\cdots,q_m}(A)$ 关于 q_1 是单调上升的, 如 $k_1\neq 0$ 则诸 x_1^0 中不会全是0, 这样(2.6)式作为 q_1 的函数是严格单调上升的. □

定理2.2的证明: 依 $q_L(k_1,\cdots,k_m)$ 的定义

$$q_L(k_1,\cdots,k_m)=\inf\{q_m:G(k_1,\cdots,k_m;q_1,\cdots,q_m)>\alpha,\ 0\leq q_1\leq\cdots\leq q_m\leq 1\}.$$

由引理2.2知 $G(k_1,\cdots,k_m;q_1,\cdots,q_m)$ 为 q_i 的单调函数 $i=1,2,\cdots,m$, 由此不难证明:

$$\begin{aligned}&\{q_m:G(k_1,\cdots,k_m;q_1,\cdots,q_m)>\alpha,\ 0\leq q_1\leq\cdots\leq q_m\leq 1\}\\=&\{q_m:G(k_1,\cdots,k_m;q_m,\cdots,q_m)>\alpha,\ 0\leq q_m\leq 1\}.\end{aligned}$$

故 $$q_L(k_1,\cdots,k_m)=\inf\{q:G(k_1,\cdots,k_m;q,\cdots,q)>\alpha,\ 0\le q\le 1\}$$
$$=\inf\Big\{q:\sum_{(x_1,\cdots,x_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{x_i}q^{x_i}(1-q)^{n_i-x_i}>\alpha,\ 0\le q\le 1\Big\}.$$

由于 $\sum_{(x_1,\cdots,x_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{x_i}q^{x_i}(1-q)^{n_i-x_i}$ 是 $q(0\le q\le 1)$ 的严格单调上升连续函数(见[4]). 所以 $q_L(k_1,\cdots,k_m)$ 为下列方程

$$\sum_{(x_1,\cdots,x_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{x_i}q^{x_i}(1-q)^{n_i-x_i}=\alpha$$

的唯一解. 即定理2.2结论成立. □

有了定理2.2我们就可以通过二分法求解方程组(2.5)得到 $q_L(k_1,\cdots,k_m)$, 且可证明下列定理2.3.

定理2.3 将 E 中元素写成 $z=(x_1,\cdots,x_m)$, 并且将 E 中全部元素按关系 $\succ$ 排成一个链:

$$z_N\succ z_{N_1}\succ\cdots\succ z_1,$$

记 $q_L(z)$ 为 q_m 的前述水平为 $1-\alpha$ 的置信下限, 则

1) $$q_L(z_1)<q_L(z_2)<\cdots<q_L(z_N); \tag{2.7}$$

2) 若 $q_L(z_i)\neq 0$, 则 $$\lim_{q\uparrow q_L(z_i)}P_{q\cdots q}\{q\ge q_L(Z)\}=1-\alpha. \tag{2.8}$$

3) 当 $q_1=q_2=\cdots=q_m=q=q_L(z_i)\neq 0$ 时,

$$P_{q\cdots q}\{q\ge q_L(Z)\}>1-\alpha. \tag{2.9}$$

证明: (证明略.) □

推论 $$\inf_{(q_1,\cdots,q_m)\in\Theta}P_{q_1\cdots q_m}\{q_m\ge q_L(X_1\cdots X_m)\}=1-\alpha. \tag{2.10}$$

定理2.4 设在 E(见(2.3))中两个点 $x=(k_1,\cdots,k_l,k_{l+1},\cdots,k_m)$, $x^*=(k_1,\cdots,k_l-1,k_{l+1}+1,\cdots,k_m)$, 则按定义2.1中的排序关系 $\succ$, 应有 $x^*\succ x$. 证明见§5.

§3. 指数寿命型

设某种产品的寿命 X 服从指数分布

$$P_\theta(X\le t)=1-\exp\Big\{-\frac{t}{\theta}\Big\},\qquad t\ge 0,$$

其中 $\theta=E_\theta(X)$.

开发研制这种产品用了 m 个阶段, 记第 i 阶段产品的平均寿命为 θ_i. 由可靠性增长试验的假设应有

$$0<\theta_1\le\cdots\le\theta_m<\infty. \tag{3.1}$$

设 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 是 m 个正数, 第 i 阶段采用定总时 t_i 的截尾试验方案, 在 $[0,t_i]$ 内的失效数记为 N_i, $Z=(N_1,\cdots,N_m)$.

1. 点估计

Brunk(1955)给出了在约束条件(3.1)下参数θ_i的极大似然估计为

$$\widehat{\theta}_i = \min_{i\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v t_j}{\sum_u^v N_j}.$$

2. 置信下限

同样我们用样本空间的字典排序法给出θ_m的置信下限.

定义3.1 设$E=\{(x_1,\cdots,x_m):x_i=0,1,\cdots,\ i=1,2,\cdots,m\}$. 定义$E$中全序关系$\succ$如下: 对于$(x_1,\cdots,x_m),(k_1,\cdots,k_m)\in E$, $(x_1,\cdots,x_m)\succ(k_1,\cdots,k_m)$(或记为$(k_1,\cdots,k_m)\prec(x_1,\cdots,x_m)$)为下列条件之一成立:

1) $x_m<k_m$;

2) 存在$1\le i\le m$, 使$\widehat{\theta}_j(x_1,\cdots,x_m)=\widehat{\theta}_j(k_1,\cdots,k_m)$, $j=i+1,\cdots,m$, 但$\widehat{\theta}_i(x_1,\cdots,x_m)>\widehat{\theta}_i(k_1,\cdots,k_m)$;

3) 存在$1\le i<m$使$\widehat{\theta}_j(x_1,\cdots,x_m)=\widehat{\theta}_j(k_1,\cdots,k_m)$, $j=1,2,\cdots,m$, $x_m=k_m,\cdots,x_{i+1}=k_{i+1}$, 但$x_i<k_i$.

对于$(k_1,\cdots,k_m)\in E$, 令

$$G(k_1,\cdots,k_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)=P_{\theta_1,\cdots,\theta_m}\{(N_1,\cdots,N_m)\succeq(k_1,\cdots,k_m)\},$$

(其中$P_{\theta_1,\cdots,\theta_m}(A)$表示$N_i$服从均值为$\frac{t_i}{\theta_i}$的Poisson分布, $N_1,\cdots,N_m$相互独立时事件A的概率.)

$$\theta_L(k_1,\cdots,k_m)=\inf\{\theta_m:G(k_1,\cdots,k_m;\theta_1,\cdots,\theta_m)>\alpha,\ 0<\theta_1\le\cdots\le\theta_m<\infty\},$$

则由文献[1]知θ_L为θ_m的置信水平为$1-\alpha$的置信下限, 且类似于§2中定理的证明我们有:

定理3.1 样本空间E中元素按关系$\succ$可以排成一个单元素的链.

定理3.2 对任何$\alpha(0<\alpha<1)$, $(k_1,\cdots,k_m)\in E$, $\theta_L(k_1,\cdots,k_m)$是下面关于$\theta(0<\theta<\infty)$的方程

$$\sum_{(x_1,\cdots,x_m)\prec(k_1,\cdots,k_m)}\prod_{i=1}^m\frac{1}{x_i!}\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{x_i}\exp\left\{-\frac{t_i}{\theta}\right\}=1-\alpha$$

的唯一解, 且方程的左端是关于θ的严格单调连续减函数. 从而可用二分法求解方程.

定理3.3 设E中元素记为$z=(x_1,\cdots,x_m)$, 并将E中全部元素按关系$\succ$排成一个链:

$$z_1\succ z_2\succ\cdots\succ z_n\succ\cdots,$$

记$\theta_L(z)$为θ_m的前述水平为$1-\alpha$的置信下限, 则

1) $\theta_L(z_1)>\theta_L(z_2)>\cdots>\theta_L(z_i)>\cdots$;

2) 对每一z_i,

$$\lim_{\theta\uparrow\theta_L(z_i)}P_{\theta\cdots\theta}\{\theta\ge\theta_L(Z)\}=1-\alpha.$$

3) 当$\theta_1=\cdots=\theta_m=\theta_L(z_i)\widehat{=}\theta$时, $P_{\theta\cdots\theta}\{\theta\ge\theta_L(Z)\}>1-\alpha$.

推论

$$\inf_{0<\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\infty}P_{\theta_1,\cdots,\theta_m}\{\theta_m\ge\theta_L(Z)\}=1-\alpha.$$

定理3.4 在同一试验方案下, 按字典排序法有 $(k_1,\cdots,k_l+1,k_{l+1}-1,\cdots,k_m)\succ(k_1,\cdots,k_l,k_{l+1},\cdots,k_m)$ 成立.

给定任务时间 $T>0$, $\widehat{R}_i(T)=\exp\left\{-\frac{T}{\theta_i}\right\}$ 是产品第 i 阶段可靠度的点估计, 由 θ_L 可得现阶段产品可靠度 $R_m(T)$ 的置信下限为 $R_L(T)=\exp\left\{-\frac{T}{\theta_L}\right\}$.

§4. 计算实例与数值结果分析

对成败型寿命试验, 只利用最后一个阶段的数据的参数 q_m 的经典方法的点估计为

$$\widehat{q}'_m=\frac{k_m}{n_m},$$

q_m 的经典置信下限记为 q'_L, q'_L 可用下列方式求解: $q'_L(0)=0$, 当 $k_m\neq0$ 时, 置信下限 q'_L 是下面方程的解:

$$\sum_{j=0}^{k_m-1}\binom{n_m}{j}q^j(1-q)^{n_m-j}=1-\alpha.$$

记文献[4]中所得置信下限为 q''_L, 本文中所得置信下限为 q_L.

如何评价三种估计方法的优劣, 下表对16组数据给出了计算结果.

编号	各阶段产品的成功数				q_L	q'_L	q''_L
1	8	4	13	8	0.7134	0.6190	0.7101
2	7	7	15	10	0.9526	0.8513	0.9525
3	3	6	12	8	0.7017	0.6190	0.6908
4	7	6	12	9	0.7866	0.7290	0.7267
5	2	3	12	8	0.6855	0.6190	0.6128
6	7	5	12	10	0.8613	0.8513	0.8706
7	4	4	14	10	0.8765	0.8513	0.9171
8	4	7	13	9	0.8145	0.7290	0.8047
9	3	7	13	8	0.7207	0.6190	0.7186
10	4	6	10	10	0.8535	0.8513	0.8529
11	3	6	13	10	0.8770	0.8513	0.8864
12	6	7	14	10	0.9160	0.8513	0.9171
13	7	5	14	9	0.8223	0.7290	0.8263
14	4	5	13	9	0.7949	0.7290	0.7267
15	7	6	9	10	0.8535	0.8513	0.8519
16	8	7	15	10	0.9590	0.8513	0.9605

表1. 三种置信下限的计算结果表

这些数据中头15组是取 $m=4$, $n_1=8$, $n_2=7$, $n_3=15$, $n_4=10$, 各阶段的可靠性参数 q_i 的值分别为 $q_1=0.7$, $q_2=0.8$, $q_3=0.85$, $q_4=0.9$, 按这些参数值模拟产生各阶段的成功次数(去掉重复出现的情况). 这样得到表中15组数据, 表中最后面的一组数据是全成功的特殊情况. 取置信水平 $1-\alpha=0.8$, 对每一组数据分别计算 q_L, q'_L, q''_L. 表中 q'_L, q''_L 的数据抄自房祥忠[4]的计算结果, 从上表计算数据可知新方法与经典方法比较所得 q_m 的置信下限有一致改进, 且比房祥忠等方法也有明显改善, 而且更利于实际操作.

在[4]中, 房祥忠等还给出了 $E_{q_1,\cdots,q_m}[q_m-q''_L]^+$ 的计算结果. 这个量刻画了 q''_L 与 q_m 接近的程度. 本文也给出了 $E_{q_1,\cdots,q_m}[q_m-q_L]^+$ 的计算结果, 并且与房的结果作了比较. 计算结果显示, 本文提供的方法有较大的改进(见表2的数据).

$m=4,\ 1-\alpha=0.8$	$E(q_m-q_L'')^+/E(q_m-q_L')^+$	$E(q_m-q_L)^+/E(q_m-q_L')^+$
$n_1=n_2=n_3=n_4=5$ $q_1=0.7,\ q_2=0.8$ $q_3=0.85,\ q_4=0.9$	0.1796/0.2796=0.6424	0.1597/0.2796=0.5712
$n_1=n_2=n_3=n_4=5$ $q_1=0.8,\ q_2=0.85$ $q_3=0.87,\ q_4=0.9$	0.15411/0.27960=0.5512	0.1458/0.2796=0.5215
$n_1=n_2=n_3=n_4=3$ $q_1=0.7,\ q_2=0.8$ $q_3=0.85,\ q_4=0.9$	0.3116/0.4096=0.7607	0.1977/0.4096=0.4827

表2. 三种置信下限的效率之比较

完全类似可模拟指数型寿命分布情形.

§5. 定理2.4的证明

为证明定理2.4我们先给出下列引理5.1-5.3: (由反证法不难得到它们的证明)

引理5.1 设(l,i,v)为满足条件: $1\le i\le l,\ v\ge l+1$的一组数, 若下式

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}<\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

成立, 则

$$1)\quad \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}<\frac{\sum_{l+1}^v k_j}{\sum_{l+1}^v n_j},\qquad 2)\quad \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}<\frac{\sum_{l+1}^v k_j}{\sum_{l+1}^v n_j}.$$

引理5.2 设(l,i,v)为满足条件: $1\le i\le l-1,\ i\le v\le l-1$的一组数, 若下式

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}<\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

成立, 则

$$\frac{\sum_{v+1}^l k_j}{\sum_{v+1}^l n_j}<\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}.$$

引理5.3 1)设(l,i,v)为满足条件: $1\le i\le l-1,\ i\le v\le l-1$的一组数, 若下式

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}\ge\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

成立, 则

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\le\frac{\sum_{v+1}^l k_j}{\sum_{v+1}^l n_j}.$$

2) 设(l,i,v)为满足条件: $1\le i\le l,\ v\ge l+1$的一组数, 若下式

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}\ge\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

成立, 则

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j}\ge\frac{\sum_{l+1}^v k_j}{\sum_{l+1}^v n_j}.$$

引理5.4 在定理2.4条件和假设下, 记x对应q_i的点估计为$\widehat{q}_i$, x^*对应q_i的点估计为$\widehat{q}_i^*$, 我们有

1) 当$i\ge l+1$时$\widehat{q}_i^*\ge\widehat{q}_i$, 当$1\le i\le l$时$\widehat{q}_i^*\le\widehat{q}_i$;

2) 若$\widehat{q}_l>\widehat{q}_l^*$, 则$\widehat{q}_{l+1}<\widehat{q}_{l+1}^*$.

证明: 1) 由最大似然估计的计算公式, 当$i\ge l+1$时,

$$\begin{aligned}\widehat{q}_i&=\min_{i\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\\&=\min_{i\le v\le m}\max\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \frac{\sum_{l+1}^v k_j}{\sum_{l+1}^v n_j},\ \max_{l+2\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}\\&\le\min_{i\le v\le m}\max\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \frac{\sum_{l+1}^v k_j+1}{\sum_{l+1}^v n_j},\ \max_{l+2\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}=\widehat{q}_i^*.\end{aligned}$$

当$1\le i\le l$时,

$$\begin{aligned}\widehat{q}_i&=\min_{i\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\\&=\min\left\{\min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}\\&\ge\min\left\{\min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j-1}{\sum_u^l n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}=\widehat{q}_i^*.\end{aligned}$$

2)

$$\widehat{q}_l=\min_{l\le v\le m}\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}=\min\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j},\ \min_{1+l\le v\le m}\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}.\tag{5.1}$$

类似

$$\widehat{q}_l^* = \min\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j},\ \min_{1+l\le v\le m}\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}. \tag{5.2}$$

由条件 $\widehat{q}_l > \widehat{q}_l^*$ 必有

$$\widehat{q}_l^* = \max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \min_{1+l\le v\le m}\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},$$

由此对所有 $v \ge l+1$ 都有

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j} = \max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^l k_j - 1 + \sum_{l+1}^v k_j + 1}{\sum_u^l n_j + \sum_{l+1}^v n_j},$$

由引理5.1(2)得

$$\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j} < \frac{\sum_{l+1}^v k_j + 1}{\sum_{l+1}^v n_j}\text{对所有 } v \ge l+1 \text{ 都成立}. \tag{5.3}$$

又

$$\widehat{q}_{l+1} = \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le l+1}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j} = \min_{l+1\le v\le m}\max\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \frac{\sum_{l+1}^v k_j}{\sum_{l+1}^v n_j}\right\},$$

$$\widehat{q}_{l+1}^* = \min_{l+1\le v\le m}\max\left\{\max_{1\le u\le l}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \frac{\sum_{l+1}^v k_j + 1}{\sum_{l+1}^v n_j}\right\}.$$

由 (5.3) 式马上可得 $\widehat{q}_{l+1}^* > \widehat{q}_{l+1}$. □

定理 2.4 的证明: 由引理 5.4 我们只须证明: 若 i 是使得 $\widehat{q}_i > \widehat{q}_i^*$ 中下标最大者, 且 $1 \le i \le l-1$. $\widehat{q}_j = \widehat{q}_j^*$, $j = l, l+1, \cdots, m$, 则 $x^* \succ x$.

由公式

$$\widehat{q}_i = \min_{i\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

$$= \min\left\{\min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j}{\sum_u^l n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}.$$

类似

$$\widehat{q}_i^* = \min\left\{\min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}.$$

由条件 $\widehat{q}_i > \widehat{q}_i^*$ 必有

$$\widehat{q}_i^* = \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j - 1}{\sum_u^v n_j} < \min\left\{\min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}\right\}.$$

由

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

得, 对所有 $v\ge l+1$ 都有

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j} = \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1 + \sum_{l+1}^v k_j + 1}{\sum_u^l n_j + \sum_{l+1}^v n_j}.$$

由引理5.1(1)对所有 $v\ge l+1$ 均有

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \frac{\sum_{l+1}^v k_j + 1}{\sum_{l+1}^v n_j}, \tag{5.4}$$

由

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \min_{i\le v\le l-1}\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}$$

得, 对所有 $i\le v\le l-1$ 均有

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j} < \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}.$$

由引理5.2对所有 $i\le v\le l-1$ 均有

$$\frac{\sum_{v+1}^l k_j - 1}{\sum_{v+1}^l n_j} < \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^v k_j}{\sum_u^v n_j}, \tag{5.5}$$

从而

$$\frac{\sum_{v+1}^l k_j - 1}{\sum_{v+1}^l n_j} < \max_{1\le u\le i}\frac{\sum_u^l k_j - 1}{\sum_u^l n_j}. \tag{5.6}$$

又

$$\widehat{q}_{i+1}=\min_{i+1\le v\le m}\max_{1\le u\le i+1}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j}$$

$$=\min\left\{\min_{i+1\le v\le l-1}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},\ \max_{1\le u\le i+1}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j}{\sum\limits_{u}^{l}n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j}\right\},$$

$$\widehat{q}^*_{i+1}=\min\left\{\min_{i+1\le v\le l-1}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},\ \max_{1\le u\le i+1}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j}\right\}.$$

由$\widehat{q}_{i+1}=\widehat{q}^*_{i+1}$得

$$\max_{1\le u\le i+1}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j}=\max\left\{\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j},\ \frac{\sum\limits_{i+1}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{i+1}^{l}n_j}\right\}$$

$$\ge\min\left\{\min_{i+1\le v\le l-1}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j}\right\}. \tag{5.7}$$

由(5.6)、(5.7)得

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j}\ge\min\left\{\min_{i+1\le v\le l-1}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},\ \min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j}\right\}.$$

(A)若

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j}\ge\min_{l+1\le v\le m}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v}k_j}{\sum\limits_{u}^{v}n_j},$$

则一定存在$l+1\le v_0\le m$使

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j}\ge\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_{u}^{v_0}k_j}{\sum\limits_{u}^{v_0}n_j}\ge\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{v_0}k_j}{\sum\limits_{u}^{v_0}n_j},$$

由引理5.3结论2)马上可得

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_{u}^{l}k_j-1}{\sum\limits_{u}^{l}n_j}\ge\frac{\sum\limits_{l+1}^{v_0}k_j+1}{\sum\limits_{l+1}^{v_0}n_j},$$

这与(5.4)式矛盾.

(B)若

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_u^l k_j-1}{\sum\limits_u^l n_j}\ge\min_{i+1\le v\le l-1}\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_u^v k_j}{\sum\limits_u^v n_j},$$

(此时$i\le l-2$)则一定存在$i+1\le v_1\le l-1$使

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_u^l k_j-1}{\sum\limits_u^l n_j}\ge\max_{1\le u\le 1+i}\frac{\sum\limits_u^{v_1} k_j}{\sum\limits_u^{v_1} n_j}\ge\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_u^{v_1} k_j}{\sum\limits_u^{v_1} n_j}.$$

由引理5.3结论1)马上可得

$$\max_{1\le u\le i}\frac{\sum\limits_u^{v_1} k_j}{\sum\limits_u^{v_1} n_j}\le\frac{\sum\limits_{v_1+1}^{l} k_j-1}{\sum\limits_{v_1+1}^{l} n_j}.$$

这与(5.5)式矛盾.

综(A)、(B)说明$i=0$或$i=l$. 若$i=l$, 与$1\le i\le l-1$条件矛盾, 若$i=0$, 则由字典排序法有$x^*\succ x$. □

参考文献

[1] 陈家鼎, 样本空间的序与置信限, 数学进展, **6**(1993), 542–552.

[2] Ayer, M., Brunk, H.D., Ewing, G.M., Reid, W.T. and Silverman, E., An empirical disribition function for sampling with incomplete information, *Ann. Math. Statist.*, **26**(1955), 641–647.

[3] Brunk, H.D., Maximum likelihood estimates of monotone parameter, *Ann. Math, Statist.*, **26**(1955), 607–616.

[4] 房祥忠, 王卫军, 陈家鼎, On estimation methods for parameters in the reliability growth tests, *Proceedings of Joint Statistical Conference*, Seoul, Korea, 42–50.

A New Process of Estimating Parameter in Reliability Growth Experiment

Chen Yingbao (*Central China Normal University, Wuhan, 430070*)

Zheng Zhongguo (*Peking University, Beijing, 100871*)

Based on the good utility of experimental data of various period in reliability growth experiment to evaluate reliability index in the present case according to the sampling data from binary and exponential life experiment, a new sample space sequencing (i.e. lexicographic order) is given to provide a point estimator and confidence lower bound of the reliability of current period. From theory and instances, it has been proved that this procedure, which overcomes some shortcomings concerned by Huang [4], is uniformly better than the classical approach. The conculsions of Theorem 2.4 and 3.4 not only include practical background of reliable growth experiment, but also improve greatly the practicable operation on this new process.